ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS I

1922—1923

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA
LITTERARUM AC SCIENTIARUM
REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE.

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM.

REDIGUNT:

A. HAAR — F. RIESZ.

TOMUS I.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK.

SZERKESZTIK:

HAAR ALFRÉD — RIESZ FRIGYES.

I. KÖTET.

1922—1923.

SZEGED.
A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM BARÁTAI EGYESÜLETÉNEK KIADÁSA.

ACTA
LITTERARUM AC SCIENTIARUM
REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE.

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM.

REDIGUNT:

A. HAAR — F. RIESZ.

TOMUS I.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK.

SZERKESZTIK:

HAAR ALFRÉD — RIESZ FRIGYES.

I. KÖTET.

1922—1923.

SZEGED.
A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM BARÁTAI EGYESÜLETÉNEK KIADÁSA.

INDEX — TARTALOM.

Tomus I. — 1922/23 — I. Kötet.

Ein Satz über Kongruenzen höheren Grades.

Von GUSTAV RADOS.

Die rationalen Wurzeln einer vorgelegten ganzzahligen algebraischen Gleichung können stets durch eine endliche Anzahl von Versuchen bestimmt werden und damit auch das Polynom derjenigen Gleichung, deren Wurzeln mit den rationalen Wurzeln der vorgelegten Gleichung übereinstimmen. Bisher ist kein Verfahren bekannt und die Warscheinlichkeit der Existenz eines solchen ist auch äusserst gering, durch das die erwähnten Versuche umgangen werden könnten und das die Bildung dieses Polynoms vermittels einer Formel ermöglichen würde. Umso bemerkenswerter ist die Tatsache, dass das analoge[1] Problem der Theorie der Kongruenzen höheren Grades sich ohne Versuche durch eine Formel glatt lösen lässt. Es ist dies umso merkwürdiger, als das Versuchselement bei der Mehrzahl der zahlentheoretischen Probleme nicht ausgemerzt werden kann.

Es sei die vorgelegte Kongruenz

$$(1) \quad f(x) \equiv a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}^1$$

mit dem Primzahl-Modul p und in der der Koeffizient a_{p-2} durch p nicht teilbar ist, (auf diese Form kann bekanntlich jede Kongruenz zurückgeführt werden) alsdann ist es bekannt, dass die Anzahl ihrer verschiedenen Wurzeln[2] gleich ist dem Überschuss von

[1] Dass die Lösung dieses Problems ohne Versuche durch direkte Berechnung möglich ist, geht schon aus der Tatsache hervor, dass das gesuchte Polynom sich als grösster gemeinschaftlicher Teiler des Polynoms der vorgelegten Kongruenz und desjenigen der entsprechenden Fermat'schen Kongruenz darstellen lässt Hier handelt es sich jedoch um die Darstellung durch eine explicite Formel.

[2] S. meine Arbeit „Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades" (Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik, Bd 99, Pag. 258)

$p-1$ über den in Bezug auf den Modul p bestimmten Rang der cyklischen Determinante

$$C = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-3} & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{p-2} & a_0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{p-2} & a_0 & \dots & a_{p-4} & a_{p-3} \end{vmatrix} = (a_0, a_1, \dots, a_{p-2}).$$

Ist daher der Rang von C (mod. p) gleich $p-s-r$, so hat die vorgelegte Kongruenz genau r verschiedene Wurzeln. Es seien dieselben

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r.$$

Das zu lösende Problem besteht nun in der Bestimmung des Polynoms

$$\varphi(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_r) = \\ = x^r + \varphi_1 x_{r-1} + \dots + \varphi_r$$

mit Umgehung von Versuchen durch eine Formel.

Die Lösung dieser Aufgabe kann durch das folgende Theorem erledigt werden:

Hat die Kongruenz

$$f(x) \equiv a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \dots + a_{p-2} \equiv o \pmod{p}$$
$$(a_{p-2} \not\equiv o \pmod{p};\ p \text{ ist eine Primzahl})$$

genau r verschiedene Wurzeln, so wird diejenige Kongruenz r-ten Grades, deren Wurzeln mit denjenigen von $f(x) \equiv o$ (mod. p) übereinstimmen, durch die Formel

$$\varphi(x) \equiv (-1)^r (r!)^{p-r} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & o & o & \dots & o & o \\ s_2 & s_1 & 2 & o & \dots & o & o \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \dots & o & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & s_{r-4} & \dots & r-1 & o \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \dots & s_1 & r \\ x^r & x^{r-1} & x^{r-2} & x^{r-3} & \dots & x & 1 \end{vmatrix} \equiv o \pmod{p}$$

geliefert, wo an Stelle von

$$s_i \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^i \left[1 - f(k)^{p-1}\right] \pmod{p}$$

zu setzen ist.

Der Beweis für diesen Satz kann in einfacher Weise geführt werden, indem man eine Wahrnehmung verwertet, die von Lebesgue herrührt und die er für die Bestimmung der Wurzelanzahl einer Kongruenz verwendet hat.[1]

Diese Wahrnehmung besteht darin, dass der Ausdruck

$$G_k = 1 - \left[f(k)\right]^{p-1}$$

in Bezug auf den Primzahl-Modul p kongruent 1 oder o wird, jenachdem k Wurzel oder Nichtwurzel der Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

ist.

Sind nun

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$$

die Wurzeln der Kongruenz 1), so können mit Benützung dieser Bemerkung die nachfolgenden Kongruenzen angesetzt werden:

$$s_1 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k\left[1 - f(k)^{p-1}\right] \equiv \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r$$

$$s_2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^2\left[1 - f(k)^{p-1}\right] \equiv \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_r^2 \qquad (\text{mod.}\, p)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_r \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^r\left[1 - f(k)^{p-1}\right] \equiv \beta_1^r + \beta_2^r + \ldots + \beta_r^r$$

Auf diese Weise kann man daher die sämtlichen Potenzsummen der Wurzeln

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$$

bestimmen.

Wenn nun

$$\varphi(x) \equiv (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_r) \equiv$$
$$\equiv x^r + \varphi_1 x^{r-1} + \ldots + \varphi_r \pmod{p}$$

gesetzt wird, so dass

$$\varphi_1 = -\sum \beta_1, \ \varphi_2 = \sum \beta_1 \beta_2, \ldots, \varphi_k = (-1)^k \sum \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k$$
$$\varphi_r = (-1)^r \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r$$

---

[1] Lebesgue: „Recherches sur les nombres", — Journal de Mathématiques pures et appliquées, Tome II. (1837). pag. 254.

S. ferner Hurwitz: „Über höhere Kongruenzen", Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, Bd. V. Pag. 17. 1902.

die elementaren symmetrischen Funktionen der Wurzeln

$$\beta_1\,,\ \beta_2\,\ldots\ldots,\ \beta_r$$

bedeuten, so bestehen zwischen diesen und den Potenzsummen derselben Grössen die nachfolgenden Newton'schen Identitäten:[1]

$$\begin{aligned}
&s_1 + \varphi_1 \equiv 0\\
&s_2 + s_1\,\varphi_1 + 2\,\varphi_2 \equiv 0\\
&s_3 + s_2\,\varphi_1 + s_1\,\varphi_2 + 3\,\varphi_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_r + s_{r-1}\,\varphi_1 + s_{r-2}\,\varphi_2 + \ldots + r\,\varphi_r \equiv 0
\end{aligned}$$

Fügt man diesen Kongruenzen noch die weitere Kongruenz

$$\left[x^r - \varphi(x)\right] + x^{r-1}\,\varphi_1 + x^{r-2}\,\varphi_2 + \ldots + \varphi_r \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

hinzu, so folgt aus dem simultanen Bestehen dieser Kongruenzen

$$\begin{vmatrix}
s_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
s_2 & s_1 & 2 & 0 & \ldots & 0\\
s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \ldots & 0\\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \\
s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \ldots & r\\
x^r - \varphi(x) & x^{r-1} & x^{r-2} & x^{r-3} & \ldots & 1
\end{vmatrix} \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$$

und hieraus schlieszlich, da $r!$ und p teilerfremde Zahlen sind, die Kongruenz

$$\varphi(x) \equiv (-1)^r\,(r!)^{p-2}\begin{vmatrix}
s_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
s_2 & s_1 & 2 & 0 & \ldots & 0\\
s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \ldots & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \\
s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \ldots & r\\
x^r & x^{r-1} & x^{r-2} & x^{r-3} & \ldots & 1
\end{vmatrix} \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$$

deren Wurzeln mit denjenigen der Kongruenz 1) übereinstimmen.

Hat die Kongruenz 1) lediglich eine einzige Wurzel, so kann diese durch die Formel

$$\xi \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k\left[1 - f(k)^{p-1}\right] \ (\text{mod. } p)$$

dargestellt werden.

---

[1] Diese haben für Kongruenzen, deren Wurzelanzahl mit ihrem Grad übereinstimmt, ebenso Geltung wie für algebraische Gleichungen.

Schliesslich möge die entwickelte Methode auf das Beispiel der Kongruenz

$$f(x) \equiv x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 4 \equiv 0 \pmod{7}$$

angewendet werden. Da der Rang der Determinante

$$C = (1, 4, 2, 2, 1, 4)$$

gleich 4 ist, besitzt die vorgelegte Kongruenz genau 2 verschiedene Wurze'n. Indem man s_1 und s_2 berechnet, ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = \sum_{k=1}^{6} k\left[1 - f(k)^6\right] \equiv 3 \\ s_2 = \sum_{k=1}^{6} k^2\left[1 - f(k)^6\right] \equiv 5 \end{array}\right\} \pmod{7}$$

Es ist daher die Kongruenz 2-ten Grades, die die Wurzeln der vorgelegten Kongruenz 5-ten Grades liefert:

$$\varphi(x) \equiv (2!)^6 \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} \equiv 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} \equiv x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

Die Wurzeln $x \equiv 1, 2 \pmod{7}$ stimmen in der Tat — wie man sich leicht überzeugt — mit den Wurzeln der vorgelegten Kongruenz 5-ten Grades überein.

Über das identische Verschwinden der Variation.

Von JOSEF KÜRSCHAK.

§. 1. Für einfache Integrale gilt bekanntlich der

Satz A: *Die linke Seite der zur Variation von*

$$\int_a^b f(x, y, y', \ldots y^{(n)})\, dx$$

gehörigen Hauptgleichung

$$V(f) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0$$

verschwindet dann und nur dann identisch, wenn f in der Gestalt

$$f = \frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + y' \frac{\partial w}{\partial y} + y'' \frac{\partial w}{\partial y'} + \ldots + y^{(n)} \frac{\partial w}{\partial y^{(n-1)}} \tag{1}$$

darstellbar ist, wo w ausser x und y nur noch

$$y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$$

enthält.

Für doppelte Integrale betrachtet man[1]) als das Analogon hiervon den

Satz B: *α) Sind w_1 und w_2 irgendwelche Funktionen[2]) der unabhängigen Veränderlichen x und y, der von diesen abhängigen Veränderlichen z, ferner einer endlichen Anzahl von Ableitungen*

$$p, q; r, s, t; \ldots$$

---

[1]) *L. Koenigsberger,* Über das identische Verschwinden der Hauptgleichungen der Variation vielfacher Integrale. Mathem?·' Annalen, Bd. 62 (1906), S. 118–147. — Besonders S. 132.

[2]) Um tiefer liegende Überlegungen zu vermeiden, verstehe ich unter Funktionen stets nur *analytische* Funktionen. Den Bereich, in dem die Funktionen betrachtet werden, denke ich mir so eingeschränkt, dass dort die betrachteten Funktionen regulär sind.

und setzen wir

$$f = \frac{d w_1}{d x} + \frac{d w_2}{d y}$$

$$= \frac{\partial w_1}{\partial x} + p \frac{\partial w_1}{\partial z} + r \frac{\partial w_1}{\partial p} + s \frac{\partial w_1}{\partial y} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial w_2}{\partial y} + q \frac{\partial w_2}{\partial z} + s \frac{\partial w_1}{\partial p} + t \frac{\partial w_2}{\partial q} + \ldots,$$

so verschwindet die linke Seite der zur Variation von

$$\iint f(x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots) \, dx \, dy$$

gehörigen Hauptgleichung

$$V(f) = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+ \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial r} + 2 \frac{d^2}{dx\,dy} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{d^2}{dy^2} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$- \ldots = 0$$

identisch.

β) Umgekehrt: verschwindet $V(f)$ für irgend eine Funktion

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t \ldots)$$

von x, y, z und einer endlichen Anzahl von Ableitungen der von x und y abhängigen Veränderlichen z identisch, so lassen sich immer zwei solche Funktionen

$$w_1 (x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots),$$

$$w_2 (x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots)$$

bestimmen, dass

(2) $$f = \frac{d w_1}{d x} + \frac{d w_2}{d y}$$

ist.

Ist dabei f von der Ordnung n (d. h haben die in f vorkommenden höchsten Ableitungen von z die Ordnung n) *und f in den Ableitungen n-ter Ordnung von z linear, so lassen sich w_1 und w_2 so bestimmen, dass sie die Ableitungen von z nur bis zur $(n-1)$-ten Ableitung enthalten.* (Im Falle $n=1$ vird f stets so beschaffen sein.) *Ist f von der Ordnung n, jedoch in den Ablei-*

tungen n-ter Ordnung von z nicht linear, *so müssen wir in der Darstellung* (2) *auch n-te Ableitungen zulassen, allerdings nur in linearer Weise.*

So z. B. kann die funktion

$$f = r\,t - s^2,$$

für die $V(f)$ identisch gleich Null ist, in der Gestalt

$$f = \frac{d}{dx}\,\frac{p\,t - q\,s}{2} + \frac{d}{dy}\,\frac{q\,r - p\,s}{2},$$

dargestellt werden, jedoch nicht in einer solchen Gestalt (2), in der w_1 und w_2 nur x, y, z, p, q enthielten.

Im Folgenden werde ich auf ein anderes Analogon von Satz **A** hinweisen.

§ 2. Ich beginne mit dem folgenden Satze, der im Grunde nur eine neue Fassung von Satz **B** α) ist:

Satz C. *Sind*

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \varphi_2,\ \psi_2;\ \ldots;\ \varphi_m,\ \psi_m$$

irgendwelche Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, y, der von diesen abhängigen Veränderlichen z und einer endlichen Anzahl von Ableitungen von z, so ist für

$$(3)\qquad f = \sum_{\alpha_i=1}^{m} \frac{d\,(\varphi_i, \psi_i)}{d\,(x, y)} = \sum_{\alpha_i=1}^{m} \left(\frac{d\,\varphi_i}{d\,x}\,\frac{d\,\psi_i}{d\,y} - \frac{d\,\psi_i}{d\,x}\,\frac{d\,\varphi_i}{d\,y}\right)$$

$V(f)$ identisch Null.

Will man diesen Satz aus **B**α) ableiten, so genügt es in Betracht zu ziehen, dass

$$\frac{d\,(\varphi_i, \psi_i)}{d\,(x, y)} = \frac{d}{d\,x}\left(\varphi_i\,\frac{d\,\psi_i}{d\,y}\right) - \frac{d}{d\,y}\left(\psi_i\,\frac{d\,\varphi_i}{d\,x}\right)$$

ist.

Umgekehrt folgt aus Satz **C** der Teil α) des Satzes **B**, wenn wir

$$m=2\,,\ \varphi_1 = w_1,\ \psi_1 = y,\ ,\ \varphi_2 = x,\ \psi_2 = w_2$$

setzen.

§. 3. Bei der Umkehrung von Satz **C** beschränke ich mich auf die einfachsten Fälle, in denen die Ordnung n von f gleich 1 oder 2 ist.

Satz D. *Ist*

$$f\,(x, y, z, p, q)$$

so beschaffen, dass

$$V(f) = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{d z}\right)\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$+ r\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + 2s\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q} + t\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$$

identisch verschwindet: so kann f als eine Funktionaldeterminante

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}$$

dargestellt werden, vo φ und ψ nur x, y, z enthalten.

Die Forderung, dass $V(f)$ identisch verschwinde, ist nämlich identisch mit den Forderungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0 \tag{3}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q} = 0. \tag{4}$$

Zufolge (3) ist

$$f = -(A\,p + B\,q - C),$$

wo A, B, C von p und q unabhängig sind. Zufolge (4) ist ausserdem

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Wie aus der **Jacobi**schen Theorie des letzten Multiplikators bekannt ist, besagt dies, dass A, B, C in der Gestalt

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

darstellbar sind. Es ist also in der Tat

$$f = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ -p & -q & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} + g \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)}$$

Aus den Sätzen **C** und **D** folgt unmittelbar.

Satz E. *Sind*

$$\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_m$$

nur von x, y und z abhängig, so kann die Summe der Funktionaldeterminanten

$$\frac{d(\varphi_1, \psi_1)}{d(x, y)}, \quad \frac{d(\varphi_2, \psi_2)}{d(x, y)}, \ldots, \frac{d(\varphi_m, \psi_m)}{d(x, y)}$$

in der Gestalt einer einzigen Funktionaldeterminante

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)}$$

dargestellt werden, wo φ und ψ nur x, y und z enthalten.

§. 4. Für den Fall, dass f die Ordnung 2 hat, gilt

Satz F. *Ist*

$$f(x, y z, p, q, r, s, t)$$

so beschaffen, dass $V(f)$ identisch verschwindet: so kann f als die Summe zweier Funktionaldeterminanten

$$\frac{d(\varphi_1, \psi_1)}{d(x, y)}, \quad \frac{d(\varphi_2, \psi_2)}{d(x, y)}$$

dargestelt werden, wo φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 nur x, y, z, p, q enthalten.

Dies ist, wenn f in r, s, t linear ist, eine unmittelbare Folge von Satz **B** β). Nach jenem Satze kann nämlich f in der Gestalt

$$f = \frac{d\omega_1}{dx} + \frac{d\omega_2}{dy}$$

ausgedrückt werden, wo ω_1 und ω_2 nur x, y, z, p, q enthalten. Diese Darstellung lässt sich aber auch so schreiben

$$f = \frac{d(\omega_1, y)}{d(x, y)} + \frac{d(x, \omega_2)}{d(x, y)}.$$

Der kompliziertere Fall, in dem f in r, s, t nicht linear ist, kann auf den soeben erledigten einfachen Fall zurückgeführt werden, und zwar durch die folgenden Überlegungen.

Für eine beliebige Funktion

$$f\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)$$

ist im allgemeinen $V\,(f)$ von der vierten Ordnung. Die Ableitungen vierter Ordnung fallen nur dann heraus, wenn f die **Monge-Ampère**-sche Gestalt

$$f = A + B\,r + 2\,C\,s + D\,t + E\,(r\,t - s^2)$$

hat, wo A, B, C, D, E nur x, y, z, p, q enthalten.[3])

Soll, wie wir voraussetzen, $V\,(f)$ identisch verschwinden, so muss f um so mehr die **Monge-Ampère**-sche Gestalt haben.

Bei jeder Berührungstransformation

$$z' = Z\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$$

$$x' = X,\quad y' = Y,\quad p' = P,\quad q' = Q$$

geht der Differentialausdruck

$$f\,d\,x\,dy$$

wieder in einen solchen Differentialausdruck

$$\overline{f}\,d\,x'\,dy'$$

über, in dem $\overline{f}$ die **Monge-Ampère**-sche Gestalt

$$\overline{A} + \overline{B}\,r' + 2\,\overline{C}\,s' + \overline{D}\,t' + \overline{E}\,(r'\,t' - s'^2)$$

hat. Dabei ist

$$\overline{f}\,\sigma = f,$$

wo

$$\sigma = \frac{d\,(X,\ Y)}{d\,(x,\ y)}$$

ist.

War $V(f)$ identisch gleich Null, so wird auch die linke Seite der zur Variation von

---

3) *H. J. Jellet*, An elementary treatise on the calculus of variations, Dublin (1852). S. 344.

$$\iint \bar{f}\, dx'\, dy'$$

gehörigen Hauptgleichung identisch verschwinden.[4])

Nun gibt es, wie aus der Theorie der **Monge-Ampère**-schen partiellen Differentialgleichungen bekannt ist, stets eine solche Berührungstransformation, dass in $\bar{f}$ das Glied

$$\bar{q}\,(r'\,t' - s'^2)$$

fehlt. Dann ist aber $\bar{f}$, wie wir bereits wissen, in der Gestalt

$$\bar{f} = \frac{d\,(\omega_1,\, y')}{d\,(x',\, y')} + \frac{d\,(x',\, \omega_2)}{d\,(x',\, y')}$$

darstellbar, wo ω_1 und ω_2 nur x', y', z', p', q' enthalten.

Gehen wir wieder zu den ursprünglichen Veränderlichen über, so erhalten wir

$$f = \bar{f}\,\sigma = \frac{d\,(\varphi_1,\, \psi_1)}{d\,(x,\, y)} + \frac{d\,(\varphi_2,\, \psi_2)}{d\,(x,\, y)}\,,$$

wo

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \varphi_2,\ \psi_2$$

diejenigen Funktionen von x, y, z, p, q bedeuten, die wir so erhalten, dass wir

$$\omega_1,\ y',\ x',\ \omega_2$$

als Funktionen von x, y, z, p, q ausdrücken.

Damit ist der Satz **F** allgemein bewiesen.

Wird die gewünschte Gestalt von f in der soeben beschriebenen Weise erzeugt, so ist,

$$\psi_1 = Y\,(x,\, y,\, z,\, p,\, q)\,, \qquad \varphi_2 = X\,(x,\, y,\, z,\, p,\, q).$$

Es wird also dann, wie aus der Theorie der Berührungstransformationen bekannt ist, der **Poissonsche** Klammerausdruck

$$[\psi_1,\, \varphi_2] = [Y,\, X]$$

verschwinden.

Es wäre erwünscht genauer zu untersuchen, ob die Funktionen

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \varphi_2,\ \psi_2$$

---

[4]) Es ist dies die unmittelbare Folge eines allgemeineren Satzes von mir. Siehe:

J. Kürschák, Über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Mathematische Annalen, Bd. 56 (1903), S 154–164.

nicht immer so gewählt werden können, dass sie noch weitere Eigentümlichkeiten zeigen.

§ 5. Man könnte vermuten dass

$$f\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)$$

im Falle $V\ (f) \equiv o$ stets als eine *einzige* Funktionaldeterminante

$$\frac{d\ (\varphi,\ \psi)}{d\ (x,\ y)}$$

darstellbar ist, in der φ und ψ nur von $x,\ y,\ z,\ p,\ q$ abhängen. Diese Vermutung ist falsch.

Bedeutet nämlich u irgend eine Funktion von p und q (und nur von diesen), so ist für

$$f = r\ \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + r\ s\ \frac{\partial^2 u}{\partial p\ \partial y} + t\ \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$$

$V\ (f) \equiv 0$. Wäre nun

$$f = \frac{d\ (\varphi,\ \psi)}{d\ (x,\ y)}\,,$$

so wäre

$$\Phi\ (\varphi,\ \psi) = o,$$

(wo Φ eine beliebige Funktion bedeutet) ein allgemeines intermediäres Integral erster Ordnung der **Monge**-schen partiellen Differentialgleichung

$$r\ \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + 2\ s\ \frac{\partial^2 u}{\partial p\ \partial q} + t\ \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = o.$$

Diese Differentialgleichung ist aber im Falle

$$u = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

genau die Differentialgleichung der Minimalflächen und hat in diesem Falle kein allgemeines intermediäres Integral erster Ordnung.

Über ein Problem von Dedekind.

Von MICHAEL BAUER.

1. Dedekind hat zum erstenmal Beispiele für das Vorhandensein gemeinsamer ausserwesentlicher Diskriminantenteiler in algebraischen Zahlkörpern angegeben.[1]) Er hat bewiesen, dass wenn die Zahl α die Gleichung

$$(1) \qquad F(\alpha) = \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$$

erfüllt, dann ist die Zahl 2 im Körper dritten Grades $K(\alpha)$ ein Produkt von drei verschiedenen Primidealen, folglich nach seinen allgemeinen Untersuchungen ein gemeinsamer ausserwesentlicher Diskriminantenteiler. Eine andere Behandlung desselben Beispiels gab ich in einer Annalen-Note.[2]) Die Zerlegung der Zahl 2 ergibt sich a. a. O. als unmittelbare Anwendung eines Satzes über die sog. Puiseuxschen Zahlen einer Gleichung. Eine dritte Behandlung der Gleichung (1) hat K. Hensel mittels seiner Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen gegeben.[3])

Man kann sich die folgende Aufgabe stellen. Es sind alle Körper n-ten Grades zu bestimmen, in welchen für eine gegebene beliebige Primzahl p die Zerlegung

$$(2) \qquad p = \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{g_r}$$

---

[1]) Göttinger Anzeiger 20/9 1871. Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen. Göttinger Abhandlungen Bd. 23. S. 30. (1878.) Reproduziert bei Bachmann: Zahlentheorie V. Theil. S. 280.

[2]) Über die ausserwesentlichen Diskriminantenteiler einer Gattung. Math. Annalen Bd. 64. S. 573. (1907).

[3]) Hensel: Theorie der algebraischen Zahlen. Bd. 1. S. 274. (1908).

statthat, wo $\mathfrak{p}_i$ verschiedene Primideale f_i-ten Grades bedeuten. Die folgende Note löst diese Aufgabe für den Fall $f_i=1$, also wenn die Summe

$$(2^*) \qquad g_1 + g_2 + \ldots + g_r = n$$

ausfällt.

2. Die Zahl ω bestimme einen algebraischen Zahlkörper n-ten Grades K. Es sei q eine Primzahl, für welche die Zerlegung

$$(3) \qquad q = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_n$$

statthat, wo $\mathfrak{q}_i$ verschiedene Primideale ersten Grades bedeuten. Ein beliebiges der Primideale soll durch $\mathfrak{q}$ bezeichnet werden. Wir werden den folgenden Satz beweisen:

Ist die ganze Zahl α des Körpers durch $\mathfrak{q}$ teilbar und enthält sie keinen anderen Primfaktor von q, so bildet α eine primitive Zahl des Körpers.

3. Es sei G der Galoissche Körper von K. Der Grad von G sei N, seine Gruppe $\mathfrak{G}$, der Körper K gehöre zur Untergruppe $\mathfrak{K}$. Aus (3) folgt bekanntlich, dass in G

$$(3^*) \qquad q = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_N$$

ausfällt, wo $\mathfrak{Q}_i$ verschiedene Primideale ersten Grades bezeichnen. Ein beliebiges der Primideale sei durch $\mathfrak{Q}$ bezeichnet. Die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{Q}$ ist $\mathfrak{H}=E$ gleich der Einheitsgruppe. Es existiert immer eine Operation R der Gruppe $\mathfrak{G}$, dass $\mathfrak{q}$ durch $R\mathfrak{Q}$ teilbar wird. Aus der grundlegenden Dedekindschen Regel[4]) lässt sich leicht folgern,[5]) dass von den Konjugierten des Ideals $\mathfrak{q}$ jene und nur jene durch $\mathfrak{Q}$ teilbar sind, welche sich in irgendwelchem der Körper $\mathfrak{K}R^{-1}\mathfrak{H}\omega$ befinden. Da nach den Voraussetzungen die Zahlen $\mathfrak{K}R^{-1}\mathfrak{H}\omega$ einander gleich sind, so fallen die konjugierten Zahlen $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ alle von einander verschieden aus, die Zahl α ist daher eine primitive Zahl.

4. In jedem Körper G gibt es unendlichviele Primzahlen q, für welche eine Zerlegung (3*) und folglich im Körper K eine

---

[4]) Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten 1894. S 272—277.

[5]) Vgl. meinen Aufsatz: „Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen etc. (Erscheint in der Math. Zeitschrift).

Zerlegung (3) statthat. Es ist daher die Bedingung $(q, p)=1$ für jede Primzahl p erfüllbar.

5. Es sei jetzt für die gegebene Primzahl p im Körper K

$$(4) \qquad p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \dots \mathfrak{p}_s^{e_s} ,$$

wo $\mathfrak{p}_i$ verschiedene Primideale bedeuten. Es sind in K primitive ganze Zahlen Ω vorhanden, für welche die Zerlegung

$$(5) \qquad \Omega = \mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \dots \mathfrak{p}_s^{a_s}\, \mathfrak{r} , \; (p, \mathfrak{r}) = 1$$

statthat, wo die charakteristischen Zahlen $\frac{a_i}{e_i}$ $(i = 1, 2, \dots, s)$ beliebige positive rationale Zahlen sind. Diese Behauptung kann einfach bewiesen werden. Bekanntlich sind ganze Zahlen Ω vorhanden, die genau durch $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ teilbar sind, ferner das Ideal $\mathfrak{q}$ enthalten und durch keinen anderen Primfaktor von q teilbar sind. Eine solche Zahl ist nach den Vorigen primitiv. Genügt die Zahl Ω der irreduziblen ganzzahligen Gleichung

$$(6) \qquad F(\Omega) = \Omega^n + a_1 \Omega^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

dann sind die Puiseuxschen Zahlen der Gleichung inbezug auf p numerisch gleich den Zahlen $\frac{a_i}{e}$ [6])

6. Aus dem Vorangehenden ergibt sich als spezieller Fall die folgende Tatsache. Ist ein Körper K

$$(7) \qquad p = \mathfrak{p}^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \dots \mathfrak{p}_r^{g_r} ,$$

wo $\mathfrak{p}_i$ verschiedene Primideale ersten Grades bedeuten, infolgedessen die Summe

$$g_1 + g_2 + \dots + g_r = n$$

ausfällt, so kann der Körper K durch eine irreduzible ganzzahlige Gleichung

$$(8) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

definiert werden, deren Puiseuxsche Zahlen inbezug auf p gleich

---

[6]) M. Bauer: Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Grössen Journal für Math. Bd. 132. S. 21. (1907).

$$(8^*) \qquad \frac{a_1}{k_1}, \frac{a_2}{k_2}, \ldots, \frac{a_r}{k_r}$$

ausfallen und die Relationen

$$(8^{**}) \qquad (a_i\ k_i) = 1 \quad, k_i' = g_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

erfüllen. Dieser Satz ist auch umkehrbar. A. a. O. ist bewiesen, dass aus (8), (8*). (8**) die Relationen (7), (7*) folgen. Hiermit ist unsere Aufgabe gelöst. Ist die Zahl $p \geqq n$, also sicher kein ausserwesentlicher gemeinsamer Diskriminantenteiler, so ist die Lösung des im Punkte 1. gestellten Problems ganz allgemein aus Dedekinds Arbeiten leicht zu entnehmen.

Sur le théorème de M. Egoroff et sur les opérations fonctionnelles linéaires.

Par M. Frédéric Riesz.

Toute suite convergente de fonctions mesurables converge uniformément sauf au plus pour un ensemble de mesure aussi petite qu'on veut. Ce théorème, découvert par M. *Egoroff* en 1911,[1]) se déduit immédiatement des premiers principes de la théorie d'intégration de M. *Lebesgue*, et quelque frappant qu'il soit, ce serait exagérer sa portée d'en attendre qu'il conduise à des conséquences essentiellement nouvelles. Le plus grand mérite de la découverte de M. *Egoroff* est d'avoir mis en évidence les relations qui existent entre les théorèmes généraux de MM. *Osgood*, *Lebesgue*, *Vitali* et d'autres relatifs à l'intégration terme-à-terme des suites et le théorème classique sur l'intégration des suites uniformément convergentes. Je pense que la démonstration que je vais donner en ne supposant connues ni l'idée de fonction mesurable ni celle de mesure, contribuera aussi à ce rapprochement de la théorie de M. *Lebesgue* à l'Analyse classique.

I.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une suite monotone de fonctions continues d'une ou de plusieurs variables, définies sur un ensemble fermé E. Soit E^* un sous-ensemble fermé de E sur lequel la fonction limite est continue, bien entendu en négligeant les valeurs prises sur l'ensemble $E—E^*$. Dans ce cas, d'après un théorème connu de M. *Dini*, la suite est uniformément convergente sur l'ensemble E^*. Mais en général, quant à l'ensemble total E, on peut seulement affirmer que la fonction limite y est semicontinue. Donc tout revient à démontrer le théorème suivant:

---

[1]) D. Th. *Egeroff*, Sur les suites de fonctions mesurables, Comptes rendus, tome 152 (1911) p. 244—246.

Étant donnée, sur un ensemble fermé E, une fonction semicontinue, on peut, en enlevant de E les points appartenant à un système fini ou dénombrable d'intervalles dont la somme est aussi petite qu'on veut, rendre la fonction continue sur l'ensemble qui reste.

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer qu'Il s'agisse d'une fonction f semicontinue inférieurement c'est-à-dire telle que, pour toute quantité A, l'ensemble des points où $f \leq A$, soit fermé. Rangeons l'ensemble des nombres rationnels dans une suite $r_1, r_2, \ldots$ et soit E_k l'ensemble où $f \leq r_k$. Soit de plus I un intervalle ouvert (à une ou plusieurs dimensions) contenant E dans son intérieur. L'ensemble complémentaire de E_k par rapport à I formant un ensemble ouvert, on peut en enlever, moyennant un procédé souvent appliqué, un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles de somme arbitrairement petite, soit $< \varepsilon_k$, de sorte qu'il reste un nombre fini d'intervalles fermés. La partie de E comprise dans ces intervalles fermés est elle-même fermée et n'a aucun point de commun avec E_k. En choisissant par exemple $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}\varepsilon$ et en opérant ainsi pour toutes les valeurs de l'indice k, la somme totale des intervalles enlevés successivement ne dépassera pas la quantité ε arbitrairement choisie. Soit E^* la partie de E extérieure à tous ces intervalles. Pour chaque valeur de l'indice k, E^* se compose de deux parties dont l'une, E_k^*, partie de E_k extérieure aux intervalles enlevés, est fermée en même temps que l'ensemble E_k lui-même ; l'autre, $E^*-E_k^*$, appartenant à un nombre fini d'intervalles fermés qui n'ont aucun point de commun avec E_k^*, sera elle-même fermée. De plus, comme les ensembles E_k^* et $E^*-E_k^*$ sont compris respectivement dans les ensembles E_k et $E-E_k$, on aura $f \leq r_k$ dans E_k^*, $f > r_k$ dans $E^*-E_k^*$.

Je dis qne notre fonction est continue sur l'ensemble E^*. En effet, pour A quelconque, l'ensemble des points de E^* pour lesquels $f \geq A$ est fermé puisque c'est la partie commune des ensembles fermés $E^*-E_k^*$ correspondant aux nombres rationnels $r_k < A$. Par conséquent, la fonction est sur l'ensemble E^* semicontinue non seulement inférieurement, comme elle l'était déjà, d'après l'hypothèse faite, pour l'ensemble prímitif E, mais elle l'est aussi supérieurement c'est-à-dire que, sur l'ensemble E^*, la fonction est continue, c. qu. f. d.

2.

Cela étant, envisageons une suite $f_1, f_2, \ldots$, convergente, mais pas nécessairement monotone, dont les éléments soient des fonctions continues sur l'ensemble fermé E. Soit f^* la fonction limite et désignons par $f^{(m)}$ l'enveloppe supérieure de la suite $f_m, f_{m+1}, \ldots$, c'est-à-dire la fonction égale en chaque point de E à la borne supérieure des valeurs respectives des fonctions f_n $(n = m, m + 1, \ldots)$. La fonction $f_{(m)}$ est la limite d'une suite croissante de fonctions continues, savoir des fonctions f_{mn} égales pour chaque $n \geqq m$ et en chaque point de E, à la plus grande des valeurs respectives des fonctions $f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n$. Par conséquent, les fonctions $f^{(m)}$ sont semicontinues inférieurement. D'autre part, ces fonctions forment une suite monotone décroissante tendant vers f^*. Soit δ une quantité positive arbitrairement choisie. Comme la fonction $f^{(m)}$ est semicontinue, il existe un système d'intervalles de somme $<\frac{1}{2^m}\delta$ et tel que, en supprimant les points de E appartenant à ces intervalles, la fonction $f^{(m)}$ est continue sur l'ensemble qui reste. En opérant ainsi pour chaque valeur de l'indice m, on parvient à définir un système d'intervalles dont la somme totale est $<\delta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = \delta$ et tel que si l'on néglige les points de E qui y appartiennent, toutes les fonctions $f^{(m)}$ seront continues sur l'ensemble qui reste. Enfin, en appliquant à cette suite monotone de fonctions continues le théorème que nous venons de démontrer, il ne faut que supprimer encore les points appartenant à un dernier système d'intervalles de somme arbitrairement petite, soit $< \delta$, et la convergence des $f^{(m)}$ vers f^* sera uniforme sur l'ensemble qu reste

Le même raisonnement tient pour les enveloppes inférieures $f_{(m)}$ définies d'une façon analogue. En somme, on aura négligé les points de E appartenant à un système d'intervalles de somme $< 4\delta$; sur l'ensemble fermé qui reste, les suites $\{f^m\}$ et $\{f^{(m)}\}$, l'une décroissante et l'autre croissante, tenderont uniformément vers la fonction f^*. Or, en vertu des inégalités $f_{(m)} \leqq f_m \leqq f^{(m)}$, il en sera de même pour la suite $\{f_n\}$.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant, cas particulier du théorème de M. *Egoroff*[1]:

Étant donnée, sur un ensemble fermé, une suite convergente de fonctions continues, on peut, en supprimant les points appartenant *a un système d'intervalles de somme arbitrairement petite, rendre la convergence uniforme sur l'ensemble qui reste.*

3.

On doit à M. *Borel* une définition très simple de l'intégrale;[1]) sans supposer connue la théorie de la mesure, cette définition est néanmoins tout à fait équivalente à celle de M. *Lebesgue*[2]). La voilà. Étant donnée une fonction f définie dans un intervalle I, nous la disons *intégrable* si les deux hypothèses suivantes sont satisfaites:

1. On peut enlever de l'intervalle I un système d'intervalles de somme arbitrairement petite, de sorte que la fonction devienne intégrable au sens de Riemann sur l'ensemble fermé qui reste;

2. en faisant tendre vers zéro la somme des intervalles enlevés, la valeur de l'intégrale tend vers une limite déterminée.

Cette limite, quand elle existe, sera l'intégrale de la fonction prise sur l'intervalle I.

Remarquons qu'on peut remplacer l'hypothèse 1. par la suivante:

1a. On peut enlever de l'intervalle I un système d'intervalles de somme arbitrairement petite, de sorte que la fonction devienne continue sur l'ensemble fermé qui reste.

En effet, les points de discontinuité d'une fonction intégrable au sens de Riemann formant un ensemble de mesure nulle, pourront être enfermés dans des intervalles dont la somme sera aussi petite qu'on voudra.

Ceci dit, faisons abstraction de l'hypothèse 2. et considérons seulement l'hypothèse 1a. En partant de la théorie de M. *Lebesgue*, on montre aisément que cette hypothèse est équivalente à la suivante: la fonction f est *mesurable* sur l'intervalle I. Mais on peut aussi définir les fonctions „mesurables" par l'hypothèse 1a., c'est-à-dire sans se servir de la théorie de la mesure. Or, pour

---

[1]) E. *Borel*, Sur la définition de l'intégrale définie, Comptes rendus, tome 150 (1900) p. 375—377.

[2]) H *Hahn*, Uber eine Verallgemeinerung der Riemannschen Integraldefinition, Monatshefte für Mathematik u. Physik, 26. Jahrgang (1915) p. 3—18, T. H. *Hildebrandt*, On integrals related to and extensions of the Lebesgue integrals, Bulletin of the American Math. Society, vol. 24 (1917—8) p. 113—114. 177—202. cf. p. 135—138. et p. 202.

les fonctions mesurables ainsi définies, le théorème de M. *Egoroff* est à-peu-près évident. En effet, soit $\{ f_n \}$ une suite convergente de fonctions mesurables et soit f^* leur limite. En se donnant arbitrairement une quantité positive ε, on peut d'après l'hypothèse 1a, enlever de l'intervalle I un système d'intervalles de somme $< \frac{1}{2^n}\varepsilon$, de sorte que la fonction f_n soit continue sur l'ensemble qui reste. En opérant ainsi pour tous les $n = 1, 2, \ldots$, on parvient à supprimer un système d'intervalles de somme $< \varepsilon$ et les fonctions f_n seront continues sur l'ensemble fermé que reste. Par conséquent on peut, d'après le théorème démontré, enlever les points appartenant à un dernier système d'intervalles de somme $< \varepsilon$ et cela de sorte que la convergence des f_n vers f^* soit uniforme sur l'ensemble qui reste.

Voilà une autre définition des fonctions mesurables équivalente à celle de M. *Lebesgue*. Une fonction f, définie sur l'intervalle I, sera dite mesurable, si elle est la limite, presque partout (c'est-à-dire sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle), d'une suite de fonctions continues sur l'intervalle I. En ce qui concerne les points d'exception, la suite y peut être convergente sans tendre vers f ou bien elle y peut être divergente.

En partant de cette définition et d'après ce qui précède, *le théoréme de M. Egeroff est presque évident.* Il s'en suit immédiatement que *la limite d'une suite presque partout convergente de fonctions mesurables est elle-même une fonction mesurable.* Il en est de même si l'on remplace, dans la définition que nous venons de formuler, l'hypothèse de la continuité par l'autre que les éléments de la suite soient des fonctions *simples* c'est-à-dire constantes par des intervalles. D'ailleurs on voit aisément que la définition ainsi modifiée est équivalente à la précédente.

4.

J'ai montré ailleurs comment on peut développer la théorie de l'intégration, dans la même généralité que l'a fait M. *Lebesgue*, en partant des suites dont je viens de parler, formées de fonctions simples et convergant presque partout.[1]) Le cas particulier correspondant du théorème de M. *Egoroff* y jouait un rôle essentiel.

---

[1]) F. *Riesz*, Sur l'intégrale de Lebesgue, Acta mathematica, tome 42, (1919) p. 192—205.

La démonstration y donnée est moins simple et moins générale que celle que je viens d'exposer et en combinant les deux méthodes, on pourrait rendre encore plus élémentaire la théorie que j'ai autrefois développée. Pour éviter double emploi, je passerai à un ordre d'idées plus général en essayant d'esquisser le rôle qui revient au théorème de M. *Egoroff* dans la théorie des *opérations fonctionnelles linéaires.*

Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse des fonctions d'une seule variable, définies dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, et envisageons la totalité Ω des fonctions continues dans cet intervalle. L'opération fonctionnelle $A[f(x)]$, faisant correspondre à chaque élément de Ω un nombre déterminé, est dite continue si, pour chaque suite $f_1, f_2, \ldots$ tendant uniformément vers une fonction f, les valeurs $A[f_m]$ tendent vers la limite $A[f]$. Une opération distributive et continue à la fois est dite linéaire. On voit aisément qu'une telle opération est aussi bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante M de sorte que l'on ait, pour chaque élément f de Ω:

$$|A[f]| \leqq M \times \max |f|$$

J'ai étudié ces opérations linéaires à plusieurs reprises et j'ai montré comment on peut les représenter par des intégrales de *Stieltjes.*[1]) Cette question revient, comme je l'avais exposé d'une façon détaillée dans le dernier des travaux cités, à la possibilité d'étendre l'opération à un champs fonctionnel plus large, comprenant les fonctions simplement discontinues et la méthode dont je me suis servi pour effectuer ce prolongement, conduisait encore plus loin et aboutit à définir l'opération pour toutes les fonctions semicontinues et pour leurs combinaisons linéaires. D'autre part, mes premières recherches sur ce sujet fournissaient l'occasion à M. *Lebesgue* d'établir le lien entre les intégrales de *Stieltjes* et les siennes ;[2]) de cette relation, il s'ensuit immédiatement qu'on peut, avec quelques réserves, prolonger le champs des opérations

---

[1]) F. *Riesz,* Sur les opérations fonctionnelles linéaires, Comptes rendus, tome 149 (1909) p. 974—77 ; Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, Annales de l'Ecole normale superieure, 3 série, tome 28 (1911) p. 33—62 ; Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires, ibidem, 3. serie tome 31 (1914) p. 9—14.

[2]) H. *Lebesgue,* Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires, Comptes rendus, tome 150 (1910) p. 86—88.

linéaires jusqu' aux fonctions mesurables. L'étude des généralisations des deux catégories d'intégrales fut encore poussé plus loin par MM. W. H. *Young*[1]) et *Radon*[2]), et enfin M. *Fréchet*, en modifiant légèrement l'ordre d'idées suivi par ce dernier, étendait la définition et les propriétès de l'intégrale aux fonctions définies sur des ensembles abstraits.[3])

Quel rôle revient-il, dans ces généralisations, au théorème de M. *Egoroff*? Tout d'abord, est-ce qu'il reste valable sans modification? Il n'en est rien, comme on le montre aisément en partant de la remarque que dans les calculs concernant les intégrales de *Stieltjes*, c'est par la variation ou par la variation totale d'une fonction qu'on mesure les ensembles et que cette variation ne devient pas nécessairement infiniment petite avec la mesure (au sens ordinaire) de l'ensemble. Mais cette remarque indique aussi la voie pour maintenir le théorème. En effet, étant donnée l'opération linéaire $A[f(x)]$ dont nous avons parlé, convenons d'appeler *longueur* de l'intervalle ouvert $c < x < d$ *par rapport à l'opération* A ou brièvement longueur de l'intervalle cd, la borne supérieure des valeurs que prend l'opération quand on l'applique à toutes les fonctions continues de module maximum $\leqq 1$ et s'annulant à l'extérieur de l'intervalle cd. Quand on connait la fonction génératrice $\alpha(x)$ de l'opération A, c'est-à-dire la fonction à variation bornée figurant dans l'intégrale de *Stieltjes* correspondante, cette longueur de l'intervalle cd est fournie par la variation totale de la fonction $\alpha(x)$ sur la partie commune de l'intervalle ouvert cd et de l'intervalle fermé ab. On voit sans peine que toutes nos considérations restent valables lorsque nous formons la somme des intervalles conformément à cette nouvelle définition de la longueur. Bien entendu, le sens des définitions dans lesquelles intervient la longueur, dépendra du choix particulier de l'opération A; ainsi, par exemple, il n'y aura plus de fonctions mesurables,

---

[1]) V. H. *Young*, On integration with respect to a function of bounded variation, Proceedings of the London Math. Society, ser 2, vol. 13 (1914) p. 109—150.

[2]) J *Radon*, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Abt. 2. 122 (1913) p. 1295—1438.

[3]) M. *Fréchet*, Sur l'intégrale d'une fontionnelle étendue à un ensemble abstrait, Bulletin de la Societé math. de France, tome 43 (1915) p. 248—265

mais seulement des fonctions *mesurables par rapport à l'opération* A ou à la fonction $\alpha(x)$, le cas ordinaire étant celui où $\alpha(x) = x$.

Sans entrer dans les détails, je me contenterai d'esquisser brièvement comment on peut étendre l'opération définie pimitivement pour les fonctions continues, à toutes les fonctions mesurables et bornées. Nous dirons que la fonction $f(x)$ est mesurable (par rapport à l'opération A), lorsque c'est la limite, presque partout, d'une suite de fonctions $f_n(x)$ convergeant presque partout. L'expression „presque partout" veut dire: sauf un ensemble qu'on peut enfermer dans des intervalles de „somme" arbitrairement petite. Quand $f(x)$ est bornée, soit $|f(x)| \leqq G$, on peut supposer que les fonctions $f_n(x)$ soient bornées dans leur ensemble, c'est-à dire toutes inférieures en module à une constante G_1. En effet, dans le cas contraire, on pourra les modifier en remplaçant leur valeur, partout où celle-ci n'est pas comprise entre les deux bornes de $f(x)$, par la borne plus proche.

Cela étant, je dis que *les valeurs* $A[f_n]$ *tendent vers une limite déterminée.* En effet, en interprétant dans les raisonnements déjà faits, la somme des intervalles dans le sens que nous venons de préciser, il viendra que la suite des f_n peut être rendue uniformément convergente en supprimant un système d'intervalles dont la somme est aussi petite que l'on veut. C'est-à-dire que, ayant choisi arbitrairement une quantité positive ε, on aura pour toutes les valeurs suffisamment grandes des indices m et n:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon,$$

sauf peut-être dans des intervalles $I_1, I_2 \ldots$ dont la „somme" ne dépasse pas ε. Posons $f_m(x) - f_n(x) = g(x)$ et soit $g_k(x)$ la fonction continue bien déterminée s'annulant à l'extérieur de l'intervalle I_k et, dans l'intérieur de I_k, égale à $g(x) \pm \varepsilon$.

On voit aisément que la somme des fonctions g_k, uniformément convergente quand il y a une infinité d'intervalles, ne diffère de g que par une fonction continue $g_0(x)$ dont le module ne surpasse pas ε. On en déduit immédiatement l'inégalité

$$|A[f_m] - A[f_n]| \leqq (M + 2G_1)\varepsilon$$

et par conséquent, la convergence des $A[f_n]$ vers une limite déterminée. Cette limite ne dépend que de la fonction f, c'est-à-dire qu'elle est la même pour deux suites $\{f_n\}$ et $\{f_n'\}$ tendant presque partout vers la même fonction f, ce qu'on voit immédiatement en les réunissant dans une seule suite $f_1, f_1', f_2, f_2', \ldots$ tendant aussi presque partout vers la fonction f. En attachant cette limite à la fonction f comme valeur correspondante de l'opération $A[f]$, on aura le *prolongement* exigé.

Pour plus de détails, je renvoie à mon mémoire déjà cité „*Sur l'intégrale de Lebesgue*", dont les méthodes s'appliquent à notre cas d'une façon presque évidente. Nos raisonnements s'étendent aussi immédiatement au cas de plusieurs variables. Pour les ensembles abstraits, le problème est un peu plus délicat; dans ce cas, il n'y a rien de primitivement donné qui correspondrait aux intervalles ou aux ensembles fermés ou bien aux fonctions continues et le rôle que jouent ces ensembles ou ces fonctions dans nos raisonnements, devra être attribué à certaines classes d'ensembles ou de fonctions qu'il faudra introduire d'une façon plus ou moins artificielle. Je ne m'en occupe pas, car dans ce cas général, les méthodes antérieures conduiront plus facilement au but.

Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques.

Par M. FRÉDÉRIC RIESZ.

1. On doit à M. *Hardy* le théorème suivant:[1])

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe pour $o \leqq |z| < R$; alors les valeurs moyennes

$$(1) \qquad \mu_\delta(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi \qquad (o \leqq r < R, \delta > 0)$$

jouissent des propriétés suivantes:

1) $\mu_\delta(r)$ est une fonction croissante de r;

2) $\log \mu_\delta(r)$ est une fonction convexe de $\log r$.

La conclusion 2) reste valable si l'on suppose seulement que $f(z)$ soit holomorphe dans un anneau circulaire $\varrho < |z| < R$.

J'ai réussi, il y a quelque temps, d'étendre ce théorème, avec certaines modifications, aux fonctions harmoniques, réelles ou non, et comme les fonctions holomorphes ne sont que des fonctions harmoniques particulières, je suis arrivé en même temps à une nouvelle démonstration du théorème de M. *Hardy*. Depuis-là je me suis aperçu que tous ces résultats sont contenus dans le théorème général que voici:

Soit $g(x, y)$ une fonction définie à l'intérieur d'un domaine D; nous la supposons réelle, continue et telle que pour chaque point (x_0, y_0) intérieur au domaine et pour chaque valeur suffisamment petite du rayon r, on ait

$$(2) \qquad g(x_0, y_0) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

[1]) G. H. *Hardy, The mean Value of the Modulus of an Analytic Function,* Proceedings of the London Math. Soc., Ser. 2., Vol. 14. (1915.) p. 269. Cf. aussi: E. *Landau, Neuer Beweis eines Hardy'schen Satzes,* Archiv der Math. u. Phys., 3 Reihe, XXV. (1916.), p. 173.; *Darstellung und Begründung einiger neueren Ergebnisse der Funktionentheorie,* p. 83.

Dans cette hypothèse, la valeur moyenne qui figure au second membre est une fonction croissante de r et cela non seulement pour r suffisamment petit, mais sous la seule condition que r varie sans que le cercle correspondant sorte du domaine.

De plus, la valeur moyenne considérée est une fonction convexe de $\log r$ et cela même dans le cas plus général où, le point (x_0, y_0) appartenant ou non au domaine, le rayon r varie de sorte que les circonférences correspondantes forment un anneau circulaire intérieur au domaine.

2. Pour démontrer ce théorème, nous nous servirons du lemme suivant:

Soit D' un domaine intérieur de même que sa frontière au domaine D et soit, s'il en existe, $U(x,y)$ la fonction harmonique à l'intérieur du domaine D' prenant, sur la frontière de ce domaine, les mêmes valeurs que $g(x,y)$. Dans ces conditions, on aura, à l'intérieur de D',

$$g(x, y) \leqq U x,y).$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la différence

$$d(x,y) = g(x, y) - U(x, y)$$

devait atteindre un maximum $M > o$ et cela à l'intérieur du domaine D'; car, sur la frontière de D, $d(x,y) = o$. soit (x_0, y_0) un point tel que $d(x_0, y_0) = M$; on peut aussi supposer que $d(x, y)$ ne soit constante dans aucun voisinage du point (x_0, y_0); en effet, l'ensemble des points pour lesquels $d(x,y) = M$ étant fermé, admet au moins un point frontiére. Cela étant, soit r un rayon suffisamment petit pour que le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r soit compris dans le domaine D', que, de plus, l'inégalité (2) soit satisfaite et que, enfin, le long de la circonférence de ce cercle, on n'ait pas constamment $d(x, y) = M$. Alors on aura, sur cette circonférence

$$d(x, y) \leqq M,$$

et comme, d'aprés l'hypothèse faite, le signe d'égalité ne pourra pas tenir partout, il viendra

$$d(x_0, y_0) = M > \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} d(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

D'autre part, la formule de *Gauss*

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi,$$

et l'inégalité (2) donnent

$$d(x_0, y_0) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi;$$

ce qui implique contradiction. Notre lemme est donc démontré.

3. Pour démontrer notre théorème général, supposons, pour simplifier, qu'il s'agisse des valeurs moyennes prises sur des circonférences autour de l'origine comme centre. Posons

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Pour démontrer la croissance, soient r_1 et $r_2 > r_1$ les rayons de deux cercles ne sortant pas du domaine D; il s'agit de voir que $m(r_1) \leqq m(r_2)$. Pour cela, nous choisirons pour D' le domaine $x^2 + y^2 < r_2^2$. D'aprés le lemme précédent, on aura

$$g(x, y) \leqq U(x, y)$$

et par conséquent,

$$m(r_1) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_1\cos\varphi, r_1\sin\varphi)\, d\varphi = U(0, 0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_2\cos\varphi, r_2\sin\varphi)\, d\varphi = m(r_2),$$

c. qu. f. d.

Quant à la convexité, nous choisirons pour domaine D' un anneau circulaire $\varrho_1^2 \leqq x^2 + y^2 = r^2 \leqq \varrho_2^2$ compris dans le domaine D. On aura, par les mêmes raisons,

$$m(r) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi;$$

pour $r = \varrho_1$ et pour $r = \varrho_2$, les deux membres sont égaux.

Or, dans le cas de l'anneau, l'analogue de la formule de *Gauss* consiste, comme on sait, en ce que la valeur moyenne qui figure au second membre, dépend linéairement de $\log r$.[1]) C'est-

---

[1]) Cela suit p. ex. en intégrant, par rapport à r, l'équation

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial r}\, d\varphi = -\frac{1}{r} \int_{x^2+y^2=r^2} \frac{\partial U}{\partial n}\, ds = const \times \frac{1}{r}$$

à-dire que lorsqu'on trace la courbe qui représente $m(r)$ en fonction de $\log r$ et que l'on y marque les points P_1 et P_2 correspondant aux valeurs ϱ_1 et ϱ_2, la corde $P_1 P_2$ est située au-dessus de l'arc $P_1 P_2$; en d'autres mots, la courbe représente une fonction convexe.

Notre théorème général est donc démontré.

4. Pour en déduire la prémière partie du théorème de M. *Hardy*, il suffit de poser

$$g(x, y) = |f(z)|^{\delta} \qquad (z = x + i y)$$

et de vérifier l'inégalité (2). Il faut distinguer deux cas. Dans le cas où $f(x_0 + i y_0) = 0$, l'inégalité est évidente. Dans le cas contraire, désignons par $f(z)^{\delta}$ une détermination uniforme au voisinage du point $z_0 = x_0 + i y_0$. Pour r suffissamment petit, on tire de la formule de *Cauchy*

$$\left(f(z_0)\right)^{\delta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(z_0 + r e^{i\varphi})\right)^{\delta} d\varphi;$$

de là on conclut immédiatement l'intégalité requise. Alors la première conclusion de M. *Hardy* découle immédiatement de notre théorème général.

Pour la seconde partie, appliquons notre théorème au domaine

$$g(x, y) = |z|^{\beta} |f(z)|^{\delta} \qquad (z = x + i y, \delta > o),$$

β désignant un nombre réel quelconque. Il vient d'abord que $r^{\beta} \mu_{\delta}(r)$ — où $\mu_{\delta}(r)$ est la moyenne définie par la formule (1) — est une fonction convexe de $\log r$. On en déduit par un raisonnement connu qu'il en est de même pour la fonction $\log \mu_{\delta}(r)$. En effet, soit $\varrho < \varrho_1 < \varrho_2 < R$. Déterminons β de sorte que l'on ait

$$\varrho_1^{\beta} \mu_{\delta}(\varrho_1) = \varrho_2^{\beta} \mu_{\delta}(\varrho_2)$$

Soit A la valeur commune des deux expressions. De plus, soit $\varrho_1 \leqq r \leqq \varrho_2$ et déterminons la quantité t $(0 \leqq t \leqq 1)$, qui varie d'ailleurs avec r, par la condition

$$r = \varrho_1^{t} \varrho_2^{1-t}$$

Or la fonction $r^{\beta}\mu_{\delta}(r)$ étant convexe par rapport à $\log r$ pour $\varrho_1 \leqq r \leqq \varrho_2$, on aura

$$r^{\beta}\log \mu_{\delta}(r) \leqq A = A^{t}A^{1-t} = \left[\varrho_1^{\beta}\mu_{\delta}(\varrho_1)\right]^{t}\left[\varrho_1^{\beta}\mu_{\delta}(\varrho_2)\right]^{1-t} =$$
$$= r^{\beta}\left[\mu_{\delta}(\varrho_1)\right]^{t}\left[\mu_{\delta}(\varrho_2)\right]^{1-t}$$

et en divisant par r^{β} et passant au logarithme, il viendra

$$\log \mu_{\delta}(r) \leqq t\log \mu_{\delta}(\varrho_1) + (1-t)\log \mu_{\delta}(\varrho_2),$$

c. qu. f. d.

5. Pour appliquer notre théorème aux fonctions harmoniques posons

$$g(x,y) = |u(z,y)|^{\alpha} \qquad (\alpha \geqq 1),$$

$u(x,y)$ désignant une fonction, réelle ou non, harmonique à l'intérieur du domaine D. Pour vérifier l'inégalité (2), nous partons de la formule de *Gauss*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\,d\varphi$$

Dans le cas où $\alpha=1$, la conclusion est immédiate. Pour $\alpha > 1$, nous nous servirons de l'inégalité bien connue

$$\left|\int G H\right| \leqq \left[\int |G|^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\left[\int |H|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

dans laquelle nous poserons

$$G = u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\; H = 1\,;$$

il viendra

$$2\pi|u(x_0, y_0)| \leqq \left[\int_0^{2\pi}\left|u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\right|^{\alpha} d\varphi\right]^{\frac{1}{\alpha}}\left[2\pi\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

c'est-à-dire l'inégalité (2).

Nous avons donc le théorème suivant:

Les valeurs moyennes

$$I_{\alpha}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\right|^{\alpha} d\varphi \qquad (\alpha \geqq 1)$$

d'une fonction harmonique, réelle où non, jouissent des propriétes suivantes:

1) *lorsque la fonction* $u(x, y)$ *est harmonique à l'intérieur d'un cercle* $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$, $I_\alpha(r)$ *est une fonction croissante de* r;

2) *dans la même hypothèse ou plus généralement, lorsque la fonction* $u(x, y)$ *est harmonique à l'intérieur de l'anneau* $\varrho^2 < x^2 + y^2 = r^2 < R^2$, $I_\alpha(r)$ *est une fonction convexe de* $\log r$.

6. L'extension de notre méthode au cas de plusieurs variables est immédiate. Ainsi par exemple, lorqu'il s'agit d'une fonction $u(x, y, z)$ harmonique à l'intérieur d'une sphère, les valeurs moyennes $I_\alpha(r)$ qui correspondent aux sphères concentriques de rayon r, sont, pour $\alpha \geqq 1$, des fonctions croissantes de r et des fonctions convexes de $\frac{1}{r}$.

Über eine Verallgemeinerung des Du Bois Reymond'schen Lemma's.

Von Alfred Haar.

Das bekannte Lemma, das Du Bois Reymond[1]) zur Begründung der Variationsrechnung aufstellte, ist wegen seiner Wichtigkeit vielfach behandelt worden. Von den neueren Beweisen erwähne ich nur die von *Hilbert*[2]) und *Jacobsthal*[3]), sowie diejenigen die *Hadamard* in seinem Lehrbuch gegeben hat. Ich möchte in den folgenden Zeilen eine neue Methode zur Begründung dieses Lemma's auseinandersetzen, die besonders rasch zum Ziel führt. Mit dieser Methode beweise ich zuerst das Lemma selbst, sodann seine bekannten Verallgemeinerungen, die von Zermelo herrühren [4]) Zum Schlusse wende ich diese Methode an zur Ableitung eines Satzes, der — wie mir scheint — neu ist; dieser Satz wirft ein neues Licht auf den Zusammenhang eines linearen Differentialausdruck's

$$L[\eta] \equiv \eta^{(k)}(x) + p_1(x)\,\eta^{(k-1)}(x) + p_2(x)\,\eta^{(k-2)}(x) + \ldots + \\ + p_{k-1}(x)\,\eta'(x) + p_k(x)\,\eta(x)$$

(wo die $p_1(x), p_2(x), \ldots p_k(x)$ beliebig oft differentierbare Funktionen bedeuten) und des zugehörigen adjungierten Differentialausdruck's

$$\Lambda[\eta] \equiv \eta^{(k)} - (p_1\,\eta)^{(k-1)} + (p_2\,\eta)^{(k-2)} - \ldots + (-1)^k (p_k\,\eta)$$

Ich beweise nämlich, dass, wenn $u(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion bedeutet, von der Beschaffenheit, dass das Integral

---

1) Mathematische Annalen Bd. 15 (1879) p. 564.
2) s. Bolza: Lehrbuch der Variationsrechnung p. 28.
3) Archiv für Mathematik. (Berliner math. Ges). 1910.
4) Mathematische Annalen Bd. 58 (1904) p. 558.

$$\int_a^b u(x)\ L[\eta(x)]\, dx$$

stets verschwindet, wenn $\eta(x)$ *irgendeine* im Intervall $[a, b]$ k-mal stetig differentierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten $(k-1)$ Ableitungen verschwindet, so ist $u(x)$ selbst k-mal differenzierbar und eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Lambda[u] = 0.$$

I. Die im Intervall $[a, b]$ definierte stetige Funktion $u(x)$ erfülle die Bedingung

$$\int_a^b u(x) \frac{d\eta}{dx} dx = 0$$

für jede im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbare und an den Endpunkten des Intervalls verschwindende Funktion $\eta(x)$. Nach dem fraglichen Lemma muss dann $u(x) = \text{const.}$ sein; dies beweise ich, wie folgt:

Sind α und β zwei beliebige im betrachteten Intervall gelegene Stellen $(\alpha < \beta)$, so betrachte ich diejenige Funktion, die für $a \leqq x \leqq \alpha$ und $\beta \leqq x \leqq b$ gleich Null ist, für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ aber mit der Funktion $(x-\alpha)^2 (x-\beta)^2$ übereinstimmt. Diese Funktion ist im ganzen Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und verschwindet an den Endpunkten dieses Intervalls. Demzufolge ist für jedes den Ungleichungen $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ unterworfene α, β

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d}{dx} [(x-\alpha)^2 (x-\beta)^2]\, dx = 0.$$

Diese Funktion $\omega(\alpha, \beta)$ ist nach den Parametern α, β jedenfalls differenzierbar und man findet leicht für den gemischten zweiten Differenzialquotienten den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 4 \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d}{dx} [(x-\alpha)(x-\beta)]\, dx = 0.$$

Wendet man dasselbe Verfahren auf dieses Integral an, so erhält man

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial \alpha^2\, \partial \beta^2} = 4\, [u(\beta) - u(\alpha)] = 0.$$

D. h. $\quad u(\alpha) = u(\beta) \quad$ also $\quad u(x) = \text{const.} \quad$ w. z. b. w.

II. Durch Induktionsschluss kann man das *verallgemeinerte Du Bois Reymondsche Lemma* auf Grund dieser Methode folgendermassen beweisen:

Die im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $u(x)$ erfülle die Bedingung

$$\int_a^b u(x) \frac{d^k \eta}{d x^k} d x = 0, \tag{1}$$

wobei nun $\eta(x)$ irgendeine in diesem Intervall k-mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten $(k-1)$ Ableitungen verschwindet. Dann gilt offenbar für jedes den Ungleichungen $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ unterworfene α, β

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d^k}{d x^k} [(x-\alpha)^{k+1} (x-\beta)^{k+1}] \, d x = 0, \tag{2}$$

da die Funktion, die für $a \leqq x \leqq \alpha$ und $\beta \leqq x \leqq b$ gleich Null, für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ aber gleich $(x-\beta)^{k+1} (x-\beta)^{k+1}$ ist, die Bedingungen die in Gleichung (1) für $\eta(x)$ gestellt sind, erfüllt. Aus der letzten Gleichung folgt aber — wie oben —

$$-\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} = (k+1)^2 \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d^k}{d x^k} [(x-\alpha)^k (x-\beta)^k] \, d x = 0. \tag{3}$$

Differenziert man diese Gleichung nach β, so ergiebt sich — wie eine leichte Rechnung zeigt —

$$(k-1)!\,(\beta-\alpha)^k u(\beta) + (-1)^k \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d^k}{d x^k} [(x-\alpha)^k (x-\beta)^{k-1}] \, d x = 0.$$

Diese Gleichung lehrt aber — da das zweite Glied eine nach β stetig differenzierbare Funktion bedeutet — dass die Funktion $u(x)$ an jeder Stelle — mit etwaiger Ausnahme der Stelle $x = \alpha$ — eine stetige Ableitung besitzt. Da aber α selbst beliebig im Intervall $[a, b]$ gewählt sein kann, so folgt daraus dass $u(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ eine stetige Ableitung $u'(x)$ besitzt. Aus Gleichung (3) folgt nun durch Produktintegration

$$\int_\alpha^\beta u'(x) \frac{d^{k-1}}{d x^{k-1}} [(x-\alpha)^k (x-\beta)^k] \, d x = 0.$$

Diese letzte Formel ist der Gleichung (2) vollständig analog; wenden wir auf diese den obigen Schluss nochmals an, so ergiebt sich die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitung $u''(x)$ der Funktion $u(x)$ und diese erfüllt die Bedingung

$$\int_{\alpha}^{\beta} u''(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} [(x-\alpha)^{k-1} (x-\beta)^{k-1}] \, dx = 0, \text{ u. s. f.}$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens beweist man die Existenz der 3 ten, 4-ten, . . ., k-ten Ableitung der Funktion $u(x)$; die letzte erfüllt die Bedingung

$$\int_{\alpha}^{\beta} u^{(k)}(x) [(x-\alpha)(x-\beta)] \, dx = 0$$

für jedes α, β, und ist demzufolge identisch gleich Null. Aus $u^{(k)}(x) = 0$ folgt aber, dass die Funktion $u(x)$ ein Polynom $(k-1)$-ten Grades ist.

Es ist bemerkenswert an diesem Verfahren, dass zuerst die Differenzierbarkeit der Funktion bewiesen wird, und daraus auf die Bauart der Funktion geschlossen wird.

III. Eben dieser Umstand ermöglicht es den folgenden Satz zu beweisen, der als weitergehende Verallgemeinerung des Du Bois Reymondschen Lemmas zu betrachten ist:

Es sei

$$L[\eta] = \eta^{(k)}(x) + p_1(x)\,\eta^{(k-1)}(x) + p_2(x)\,\eta^{(k-2)}(x) + \ldots + p_k(x)\,\eta(x)$$

irgendein linearer Differentialausdruck, dessen Koeffizienten $p_1(x)$, $p_2(x)$, . . ., $p_k(x)$ im Intervall $[a, b]$ beliebig oft differenzierbare Funktionen sein mögen. Ist nun $u(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ definierte stetige Funktion von der Beschaffenheit, dass das Integral

$$\int_a^b u(x)\, L[\eta] \, dx$$

stets verschwindet. wenn $\eta(x)$ irgendeine im Intervall $[a, b]$ k-mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten $(k-1)$ Ableitungen verschwindet, so ist $u(x)$ selbst k-mal differenzierbar und eine Lösung der zu $L[\eta] = 0$ adjungierten Differentialgleichung

$$\Lambda(u) \equiv u^{(k)} - (p_1 u)^{(k-1)} + (p_2 u)^{(k-2)} - \ldots + (-1)^k p_k u = 0.$$

Um dies darzutun, führen wir in unsrer Bedingungsgleichung statt $\eta(x)$ die in II. benutzte Funktion ein, wodurch wir zu der Formel

$$\int_\alpha^\beta u(x)\, L\, [(x-\alpha)^{k+1}(x-\beta)^{k+1}]\, dx = 0$$

gelangen. Die Anwendung der Operation $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ führt sodann zur Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta u(x)\, L\, [(x-\alpha)^k (x-\beta)^k]\, dx = 0. \tag{4}$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach β, so ergibt sich:

$$(k-1)!\,(\beta-\alpha)^k\, u(\beta) + (-1)^k \int_\alpha^\beta u(x)\, L\, [(x-\alpha)^k (x-\beta)^{k-1}]\, dx = 0,$$

woraus wiederum die Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung der Funktion $u(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ folgt, da α eine beliebige Stelle dieses Intervalls sein kann. Diese letzte Gleichung aber ist von der folgenden Form:

$$(\beta-\alpha)^k\, u(\beta) = \int_\alpha^\beta u(x)[c_0(x) + c_1(x)\beta + c_2(x)\beta^2 + \ldots + c_{k-1}(x)\beta^{k-1}]\, dx,$$

wobei $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ beleibig oft differenzierbare Funktionen bedeuten. Differenziert man diese Gleichung nach β, so ergiebt sich die folgende Gleichung:

$$\frac{d}{d\beta}[(\beta-\alpha)^k\, u(\beta)] = u(\beta)\,[c_0(\beta) + c_1(\beta)\beta + \ldots + c_{k-1}(\beta)\beta^{k-1}] +$$
$$+ \int_\alpha^\beta u(x)[c_1(x) + 2c_2(x)\beta + \ldots]\, dx,$$

woraus wiederum auf die Existenz der zweiten Ableitung von $u(x)$ geschlossen werden kann. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens beweist man successive die Existenz der weiteren Ableitungen dieser Funktion.

Auf Grund dieser Tatsache kann man Gleichung (4) durch Produktintegration auf die folgende Form bringen:

$$\int_\alpha^\beta \Lambda[u](x-\alpha)^k (x-\beta)^k dx = 0.$$

Wenden wir auf diese Gleichung k-mal die Operation $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ an, d. h. bilden wir die Gleichung

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial\alpha^k\,\partial\beta^k}\int_\alpha^\beta \Lambda[u](x-\alpha)^k (x-\beta)^k dx = 0,$$

so ergiebt sich — wie man leicht erkennt —

$$\int_\alpha^\beta \Lambda[u]\,dx = 0$$

für jedes α, β, woraus unsre Behauptung $\Lambda[u] = 0$ unmittelbar folgt

On a maximum-minimum problem and its connexion with the roots of equations.

By E. EGERVÁRY.

1. In the present communication I intend to give a short account on my investigations concerning a maximum-minimum problem and its applications.

The origin of these investigations was the following theorem, stated and proved by P. J. *Heawood*[1]):

(*A*) *If* $f(z)$ *is a polynomial of the degree* n, *and if* $f(+1)=o$ *and* $f(-1)=o$, *then* $f'(z)=o$ *has a root in the circle, whose centre is the origin and whose radius is* $\varrho = ctg\,\frac{\pi}{n}$.

Later on my attention was called to a paper of J. H. *Grace*[2]), where a general theorem concerning the roots of „apolar" equations is proved, which contains the before-mentioned theorem, as a special case.

Recently, M. G. *Szegő*[3]) published various interesting applications of this theorem.

2. Before I proceed to the discussion of my own results obtained in this subject, I wish to point out, how we are led, in attempting to treat the question in theorem (A), quite naturally to the investigation of a maximum-minimum problem.

I state the question in the following form: Let $f(z)$ be a polynomial of the degree n and such that $f(z)$ assumes the same values for $z=1$ and $z=-1$. It is to be determined the smallest circle, whose centre is the origin and which contains at least one root of the derived equation $f'(z)=0$.

Let us denote the roots of $f'(z)=0$ by $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ (that is $f'(z)=C(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1})$), then the assump-

[1]) P. J. *Heawood*, Geometrical relations between the roots of $f(x)=0$, $f'(x)=0$, Quarterly Journal of Mathematics *38* (1907), pp. 84—107.

[2]) J. H. *Grace*, The zeros of a polynomial, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society *11* (1900—1902), pp. 352—357.

[3]) G. *Szegő*, Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen, Mathematische Zeitschrift *13* (1922), pp. 28—55.

tion, that $f(z)$ assumes the same values for $z=+1$ and $z=-1$, is evidently equivalent to the following equation:

$$(1)\ (f)+1)-f(-1)=\int_{-1}^{+1} f(z)dz=C\int_{-1}^{+1}(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1})=0$$

or

$$(1')\quad z_1 z_2\ldots z_{n-1}+\frac{1}{3}\sum z_1 z_2\ldots z_{n-3}+\frac{1}{5}\sum z_1 z_2\ldots z_{n-5}+\ldots=0.$$

In this way our problem is reduced to the following one: Consider all the systems of (complex) values $(z_1, z_2, \ldots z_n)$, wich satisfy the symmetric, multilinear relation

$$(2)\qquad c_0 z_1 z_2\ldots z_n+c_1\Sigma z_1 z_2\ldots z_{n-1}+\ldots+c_{n-1}\Sigma z_1+c_n=o$$

Denote by $m(|z_1|, \ldots |z_n|)$ the smallest amongst the moduli $|z_1|, |z_2|, \ldots |z_n|$. Now we have

I. to show, that there is an upper limit M, depending on the coefficients $c_0, c_1, \ldots c_n$ and such that for all the systems $(z_1, \ldots z_n)$, which satisfy (2),

$$(3)\qquad m(|z_1|, \ldots |z_n|)\leqq M$$

and that there is at least one system, for which $m(|z_1|, \ldots |z_n|)$ reaches this upper limit (viz. M is the maximum of $m(|z_1|, \ldots |z_n|)$);

II. to determine

$$(4)\qquad \text{Max. } m(|z_1|, \ldots |z_n|);$$

III. to determine all the systems of values $(z_1, \ldots z_n)$, for which this maximum is reached.

3. The first part of the question may be treated by most elementary considerations.

The second part, viz. the determination of Max. $m(|z_1|, \ldots |z_n|)$ was solved in the case of the special multilinear relation (1′) by *Heawood*. As to the general symmetric, multilinear relation (2), the solution is implicitely contained in the theorem (on apolar equations) of *Grace*.

The third part of the problem, the determination of all the systems $(z_1, \ldots z_n)$, for which the maximum is reached, is, so far as I am aware, neither by the mentioned authors, nor by others attempted.

My investigations enabled me to treat completely the question and the following theorems contains the full discussion of the general problem.

As to the proofs, further details and applications see my communication (in hungarian language), which appears next in the Mathematikai és fizikai lapok, Budapest, 1922.

The general solution of the maximum-minimum problem.

4. Before entering upon the details of the problem, it is necessary to mention some properties of a symmetric, multilinear function.

A symmetric, multilinear function is an expression of the form

$$(5)\quad S(z_1, z_2, \dots z_n) = c_0 z_1 z_2 \dots z_n + c_1 \Sigma z_1 z_2 \dots z_{n-1} + \dots + c_{n-1} \Sigma z_1 + c_n$$

where $c_0, c_1, \dots c_n$ are constants.

If the function S is ordered, corresponding to certain groups of the variables $z_1, \dots z_n$, it will assume the following forms:

$$S = z_1 S_{1,0}(z_2, \dots) + S_{1,1}(z_2, \dots z_n)$$

$$(6)\quad = z_1 z_2 S_{2,0}(z_3, \dots z_n) + (z_1 + z_2) S_{2,1}(z_3, \dots z_n) + S_{2,2}(z_3, \dots z_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= \sum_{l=0}^{k} S_{kl}(z_{k+1}, \dots z_n) . s_{kl}(z_1, \dots z_k)$$

where

$$(6')\quad S_{ki},\ (z_{k+1} \dots z_n) = \sum_{j=0}^{n-k} c_{i+j}\, s_{n-k\, j}(z_{k+1} \dots z_n)\,;\ (i=0, 1, \dots k)$$

and $s_j(z_1, \dots z_h)$ denotes the elementary symmetric function of the variables $z_1, \dots z_h$.

If the values of the variables $z_1, \dots z_h$ are all equal, and their common value is denoted by ζ, then the function S becomes

$$(7)\quad G(\zeta) = S(\zeta, \zeta, \dots \zeta) = \zeta^n + \binom{n}{1} c_1 \zeta^{n-1} + \dots + c_n$$

The polynomial $G(\zeta)$ of the degree n shall be denominated the *adjungated* polynomial of the symetric, multilinear function S.

If amongst the variables $z_1, \dots z_n$ there are $n-k$, i. e. $z_{k+1}, \dots z_n$ equal to ζ, then the function S will be transformed in the following symmetric, multilinear function of the k variables $z_1, \dots z_k$:

$$(8)\quad S(z_1, \dots z_k, \zeta, \dots \zeta) = \sum_{l=0}^{k} H_l^{(k)}(\zeta) . s_{k-l}(z_1 \dots z_k)$$

where

$$H_1^{(k)}(\zeta)=\frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)}G^{(k)}(\zeta),$$

$$H_2^{(k)}(\zeta)=\frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+2)}\left[G^{(k-1)}(\zeta)-\frac{\zeta}{n-k+1}G^{(k)}(\zeta)\right],$$

(8′) ....

$$H_k^{(k)}(\zeta)=G(\zeta)-\binom{k}{1}\frac{\zeta}{n}G'(\zeta)+\binom{k}{2}\frac{\zeta^2}{n(n-1)}G''(\zeta)-\dots+$$
$$+(-1)^k\frac{\zeta}{n(n-1)\dots(n-k+1)}G^{(k)}(\zeta)$$

$$=\left(1-\frac{\zeta}{n-k+1}\frac{d}{d\zeta}\right)\left(1-\frac{\zeta}{n-k+2}\frac{d}{d\zeta}\right)\dots\left(1-\frac{\zeta}{n}\frac{d}{d\zeta}\right)G(\zeta)$$

The adjungated polynomial of $S_{k,k}(z_{k+1},\dots z_n)$ is $H_k^{(k)}(\zeta)$.

In the following investigation I consider only such systems of values $(z_1,\dots z_n)$, which satisfy the relation

(9) $$S(z_1,\dots z_n)=c_0 z_1 z_2\dots z_n+c_1\Sigma z_1 z_2\dots z_{n-1}+\dots+c_n=0.$$

An element of such a system $(z_1\dots z_n)$ shall be called for shortness the absolutely greatest (least) element, if its modulus is not less (greater) than the modulus of any other element of the system, and its modulus shall be denoted by $M(|z_1|,\dots|z_n|)$ $[m(|z_1|,\dots|z_n|)]$.

A system $(z_1,\dots z_n)$, whose elements are all equal, shall be called a *coincident* system.

Finally, a system, whose elements are all different, shall be called a *dispersed* system.

5. We are now able to state with clearness the problem and its general solution:

It is to be determined $P=$ Max. $m(|z_1|,\dots|z_n|)$ for all the systems $(z_1,\dots z_n)$ subject to the relation $S=0$.

There are to be determined all the systems $(z_1^*,\dots z_n^*)$, for which the maximum is reached. So these latter systems $(z_1^*,\dots z_n^*)$, which we shall call *the maximal systems corresponding in the relation* $S=0$, have the two characteristic properties:

(10) $$S(z_1^*,\dots z_n^*)=0,$$
$$m(|z_1^*|,\dots|z_n^*|)=P.$$

The determination of Max. $m(|z_1|,\dots z_n|)$ will be furnished by the theorem

(I.) *Amongst the maximal systems corresponding to the relation* $S=0$ *there is always one coincident at least*, the immediate consequence of which is theorem

(II.) *If* $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$ *denote the roots of the adjungated equation* $G(z)=0$ (7.), then

$$(11) \qquad P=\text{Max.}\, m(|z_1|, \dots |z_n|) \doteq M(|\zeta_1|, \dots |\zeta_n|)$$

that is to say, *the abs. least element of a system* $(z_1, \dots z_n)$, *subject to the relation* $S=0$ *is not greater than the abs. largest root of the adjungated equation* $G(z)=0$.

In other words, the groups of points $(z_1, \dots z_n), (\zeta_1, \dots \zeta_n)$ in the Argand diagramm cannot be separated by any circle, whose centre is the origin.

6. The relation $S=0$ (9.) may be obviously written in the following forms

$$(12) \qquad s_n - \frac{\sigma_1 s_{n-1}}{\binom{n}{1}} + \frac{\sigma_2 s_{n-2}}{\binom{n}{2}} - \dots + (-)^n \sigma_n = 0$$

(where s_k, resp. σ_k denote the elementary symmetric functions of the quantities $z_1, \dots z_n$, resp. $\zeta_1, \dots \zeta_n$), or

$$(13) \qquad \sum_i (z_1 - \zeta_{i_1})(z_2 - \zeta_{i_2}) \dots (z_n - \zeta_{i_n}) = 0$$

In consequence of (13.) it is evident, that the relation $S=0$ (9.) is invariant with respect to the translation of the origin, so that the last form of theorem (II.) may be immediately generalised, as follows.

(III.) *If the two systems of values* $(z_1, \dots z_n)$, $(\zeta_1, \dots \zeta_n)$ *are connected by the relation* $S=0$ (9.), *or by* (13.), *the two corresponding groups of points in the Argand diagramm cannot be separated by any circle (or straight line).*

This is the form, in which the solution of the problem is stated by G. H. *Grace* (l. c.).

The discussion of the extremal systems.

7. In order to discuss the configuration of the extremal systems, we have to investigate the series of functions (defined by (6), (6'))

$$S(z_1, \dots z_n), \; S_{1,1}(z_2 \dots z_n) \; S_{2,2}(z_3, \dots z_n), \dots$$

Suppose, that in the series (11,) $S_{k,k}$ is the first term, which does not vanish for any of the maximal systems corresponding to the relation $S=0$, so that there is a maximal system $(z_1^*, \dots z_n^*)$, for which

$$S=0,\ S_{1,1}=0, \dots\ S_{k-1,k-1}=0$$

Then it may be proved (see my Hungarian communication, l. c.), that amongst the absolutely largest roots of the adjungated equation $G(z)=0$ there is at least one, for which

$$G(\zeta)=0,\ H_1^{(1)}(\zeta)=0, \dots\ H_{k-1}^{(k-1)}(\zeta)=0 \tag{15}$$

and from the definition of $H_1^{(1)}(\zeta)$ given by (8), (8′) immediately follows, that

$$G(\zeta)=0,\ G'(\zeta)=0, \dots\ G^{(k-1)}(\zeta)=0, \tag{16}$$

that is, ζ is a root with the multiplicity k for the equation $G(\zeta)=0$. So we get the theorem

(IV.) *If in the series*

$$S,\ S_{1,1},\ S_{2,2},\ \dots \tag{17}$$

$S_{k,k}$ *is the first term, which does not vanish for any of the maximal systems corresponding to the relation* $S=0$, *then amongst the abs. largest roots of the adjungated equation* $G(\zeta)=0$ *there is at least one, whose multiplicity is k, and there is no root with greater multiplicity. Amongst the elements of the maximal systems the value of* $k-1$ *elements may be taken arbitrarily* (subject only to the inequality $|z_k| \leq P$) *and the other* $n-k+1$ *elements must coincide with such an abs. largest root of* $G(z)=0$, *whose multiplicity is k.*

This theorem leads to the following classification of the maximal systems:

(A) *Suppose, that amongst the abs largest roots of the adjungated equation* $G(z)=0$ *there are multiple roots and that the highest multiplicity is k. Denote by P the modulus of the abs. largest roots of* $G(z)=0$. *Then*

(A_1) *If the roots of* $G(z)$ *are not all lying on the circle* $|z|=P$ *then amongst the elements of a maximal system* $\varkappa \leq k-1$ *elements may be chosen arbitrarily and the other* $n-\varkappa \geq n-k+1$ *elements must coincide with such an abs. largest root of* $G(z)=0$, *whose* *multiplicity is at least* $\varkappa+1$. *In this case there are no dispersed maximal systems.*

(A_2) *If all the roots of* $G(z)=0$ *are on the circle* $|z|=\varrho$, *then besides of the maximal systems defined in* (A_1), *there are dispersed maximal systems such that* $n-1$ *of their elements may be chosen on the circle* $|z|=P$ *arbitrarily.*

(B) *Suppose, that all the abs. largest roots of* $G(z)=0$ *are simple roots. Then*

(B_1) *If the equation* $G(z)=0$ *has all its roots on the circle* $|z|=P$, *then the maximal systems are such, that* $n-1$ *of its elements may be taken on the circle* $|z|=P$ *arbitrarily.*

(B_2) *If the roots of* $G(z)=0$ *are not all lying on the circle* $|z|=P$, *then the maximal systems are only in finite number. In this case every maximal system is coinciding with an abs. largest root of* $G(z)=0$.

In the special case, that $G(z)=0$ has only one abs. largest root, the maximum problem has a *unique* solution, and the only maximal system coincides with the abs. largest root of $G'(z)=0$.

Corresponding theorems may be stated in the case of the minimum problem.

Az analysis és a geometria topologiai alapjairól.

(Magántanári próba-előadás, Szeged, 1921 december 15-én.)

KERÉKJÁRTÓ BÉLÁ-tól.

Jelen előadásomban az analysis és a geometria halmazelméleti és topologiai alapjaival fogok foglalkozni.

A halmazelmélet alanyaként bizonyos elemekből álló összesség, vagy halmaz szolgál s tárgyát képezi ily halmazok elemeinek egymásra való vonatkozásainál változatlan tulajdonságaik vizsgálata. Speciálisabb anyagot nyujt a rendezett halmazok vizsgálata, ahol is a halmaz bármely két egymástól különböző elemére fennáll egy transitiv természetü rendezési relatio. További specializálást jelent az elemek limes-elemeinek bevezetése, amelyre alapozva ily halmazok egymásra való kölcsönösen egyértelmü és folytonos vonatkozásait, vagy leképezéseit vizsgáljuk; az ilyen leképezéseknél változatlan tulajdonságok vizsgálata képezi a topologia tárgyát.

Az arithmetikai disciplinák alanyául szolgálnak első fokon a véges halmazok, melyeknek jellemzésére elegendő azon tulajdonságuk, hogy bármely elrendezésöknél van első elemök. A véges halmaz elemeiből alkotott symbolicus agglomerátumok bővitik ki a vizsgált halmazt egy megszámlálható végtelen halmazzá, vagyis amelynek elemeit kölcsönösen egyértelmü módon megfeleltethetjük a természetes számoknak. A megszámlálható halmazoknak két nevezetes rendezési typusa: a természetes számok nyujtotta ω rendtypus, (az ellenkező elrendezéssel nyert typust $^*\omega$-val jelöljük) s a rationális számok nyujtotta η rendtypus.

Az egész számok összeadását s kivonását egy $^*\omega+\omega$ rendtypusnak önmagára való, a rendezési relatiókat megtartó kölcsönösen egyértelmü leképezései jellemzik; ez önként adódik az ω rendtypus meghatározásából.

Vegyünk most egy η rendszámu halmazt; ennek jellemző tulajdonsága, hogy megszámlálható, nincsen első, sem utolsó eleme és hogy önmagában sűrű, azaz bármely két elem között van a halmaznak még egy további eleme. — Translationak nevezzük ennek önmagára való kölcsönösen egyértelmű, a rendezési relatiokat megtartó oly leképezését, mely eleget tesz az archimedesi axiomának, azaz ha a a halmaz egy tetszészerinti eleme, ennek képe b az a után következik és c egy tetszésszerinti, b után következő elem, akkor a leképezés véges számu ismétlése után a elem oly a' elembe megy át, mely c után következik. Egy ily translatio a rationális számok összeadásának felel meg; azaz meg lehet feleltetni a rationális számokat az adott halmaz elemeinek kölcsönösen egyértelmű s a rendezési relatiokat megtartó módon, ugyhogy bármely elemnek és képének megfelelő rationális számok különbsége ugyanaz a rationális szám.

Legyen adva egy η rendszámu halmaz translatioinak egy csoportja, vagyis olyan összessége, mely tartalmazza bármely translatioval együtt ennek inversét s bármely két translatioval együtt az ezek összetevéséből származó leképezést, mely tehát szintén translatio. — A csoportot n modulus szerint transitivnek nevezzük, ha a halmaz bármely két eleméhez, a-hoz és b-hez, van a csoportnak olyan translatioja, melynek n-dik hatványa, vagyis $n-1$-dik ismétlése a-t b-be viszi át. — Egy a 2 modulus szerint transitiv translatiocsoport tartalmazza alcsoportként a dyadicus számok összeadási csoportját. Egy minden primszámmodulus szerint, vagy teljesen transitiv translatiocsoport tartalmazza alcsoportként a rationális számok összeadási csoportját.

Egy translatiocsoportot az n modulus szerint commensurábilisnek nevezünk, ha van az adott halmaznak két oly fix eleme, a és b, hogy ha bármely más elem is c, az a-nak az a-t c-be átvivő translatio n^k hatványánál való képe egybeesik az a-nak az a-t b-be átvivő translatio valamelyik hatványánál való képével. — Egy 2 modulus szerint commensurábilis translatiocsoport a dyadicus számok összeadási csoportjának alcsoportja. Egy teljesen commensurábilis translatiocsoport a rationális számok összeadási csoportjának alcsoportja.

Látjuk, hogy a transitivitás, illetőleg a commensurabilitás a csoportra egy alsó, illetőleg felső korlátozás jellegével bir. Ezekből következik a dyadicus, illetőleg a rationális számok összeadási csoportjainak következő jellemzése:

Egy η rendtypusnak a 2 modulus szerint transitiv s commensurábilis translatiocsoportja azonos a dyadicus számok összeadási csoportjával. — Egy η rendtypusnak teljesen transitiv s commensurábilis translatiocsoportja azonos a rationális számok összeadási csoportjával.

Az összeadással teljesen analog módon tárgyalhatjuk az η rendtypus szorzásait s ezek csoportjait. — Az összeadási és szorzási csoportok összetevése az általános algebrai operátiok csoportját szolgáltatja.

E csoport tárgyalása eddig egy megadott η rendtypusu halmazra vonatkozik; maga után vonja azonban egyrészt az adott η rendtypusu halmaznak egy ujabb ily halmazzá, másrészt a vizsgált csoportnak velejáró bővitését. Ez eljárás a számoknak egy inconsistens, vagyis nem kész halmazának megismerésére vezet s fokozatosan az összes actuálisan ismert számok halmazának előállitására alkalmas.

Térjünk át most a lineáris continuum vizsgálatára. Az előbb vizsgált η rendtypusu halmazt egy uj halmazzá bővitjük ki azáltal, hogy a definiálandó halmaz elemének vesszük az eredeti halmaz oly egymásban foglalt intervallumsorozatát, mely az eredeti halmaz összes elemeit, vagy összes elemeit egy kivételével kihagyja. Az ilyenképen definiált halmazt nevezzük lineáris continuumnak. Hasonló módon vezetjük be a valós számok összeségét a rationális, vagy algebrai, vagy bármely más actuálisan ismert, tehát szükségképen megszámlálható és önmagában sűrű számhalmaz alapján. Mindkettőnek megvan a *Dedekind* értelmében való folytonossága, azaz bármely szeletalkotásnak megfelel egy e szeletalkotást definiáló elem.

A lineáris continuum folytonossága következtében egyszerübben tárgyalhatók a fent az η rendtypusra vonatkoztatott csoportok. Translationak nevezzük a lineáris continuum önmagára való kölcsönösen egyértelmü folytonos leképezését, melynél egy elem sem invariáns; folytonosságon értendő a leképezés azon tulajdonsága, hogy egy elemhez convergáló alapsorozatot a képelemhez convergáló alapsorozatba visz át. Egy ily translatio a valós számok egy összeadásával azonos. A translatioknak bármely csoportja azonos a valós számok egy összeadási csoportjával. A translatiok egy transitiv csoportja azonos a valós számok teljes összeadási csoportjával.

Ezekből az egytagu csoportokból felépithetők kéttagu csoportok, melyek még a reciprok leképezéssel tovább bővitve a projectiv csoportot definiálják. E kérdésnek ily alapon való tárgyalása megvan *Brouwer* vizsgálataiban s ezért is nem térek rá bővebben.

Térjünk át most a kétdimensiós halmazok tárgyalására. Sikon értjük a valós számokból alkotott számpárok, pontok összességét. Egyenes vonal, kör stb. nem egyebek, mint egyszerü első, illetőleg másodfoku egyenletnek eleget tevő számpárok halmaza. Egy pont környezetén értjük egy e pont köré irt kör belsejét. Tartománynak nevezünk egy olyan sikbeli ponthalmazt, melynek minden pontja belső pont, azaz bármely pontjával együtt e pont egy környezete is a halmazhoz tartozik s melynek bármely két pontja összeköthető egy, a halmazhoz tartozó út által.

A sík topologiájának alaptételei közül elsőnek emlitendő a *dimensioszám invariantiájá*-nak tétele, mely szerint nem lehet a sík pontjai s az egyenes vonal pontjai között egy kölcsönösen egyértelmű és folytonos vonatkozást létesiteni. Továbbá a *tartomány-jelleg megmaradásá*-nak tétele, mely szerint egy tartománynak kölcsönösen egyértelmű folytonos képe a síkon maga is egy tartomány. Végül a *Jordan-görbe tétel*, melynek értelmében egy körvonal kölcsönösen egyértelmű és folytonos, síkbeli képe a síkot két tartományra osztja s minden pontja e tartományok mindegyikének határpontja.

Tekintsük ezek után a sík geometriáját a *Hilbert* által adott megalapozásban. — A síkon két pont távolságának nevezzük a coordináta-különbségek négyzetösszegéből vont négyzetgyököt, euclidesi transformationak a sík olyan kölcsönösen egyértelmű folytonos, önmagára való leképezését, melynél bármely pontpár képe egy ugyanoly távolságu pontpár; euclidesi mértan az alakzatoknak az euclidesi transformatioknál változatlan tulajdonságainak vizsgálata. Analog módon értelmezzük az egységkör belsejében a *Bólyai—Lobatschefskij*-féle mértant; két pont távolságának nevezzük a rajtok áthaladó, az egységkörre merőleges körön mért körivekből alkotott kettősviszony logarithmusát; nem-euclidesi mozgásnak az egységkör belsejének minden olyan önmagára való kölcsönösen egyértelmű folytonos leképezését, melynél a nem-euclidesi távolság változatlan; a hyperbolicus mértan az e transformatioknál változatlan tulajdonságok vizsgálata. — *Hilbert* e geometriák qualitativ megalapozására egy axiomarendszert vezetett be, mely követeli: 1. hogy a megengedett leképezések csoportot képezzenek, 2. hogy egy valódi kör pontjai, vagyis mindazon pontok összesége, melyekbe egy tetszésszerinti pont a sík egy másik pontját változatlanul hagyó összes leképezéseknél átmegy, végtelen halmazt képezzenek, 3. hogy a leképezések egy zárt rendszert alkossanak. Ezekből az axiomákból bebizonyitja *Hilbert*, hogy a megfelelő geometria nem lehet más, mint a fent ismertetett euclidesi, vagy *Bólyai—Lobatschefskij*-féle geometria.

A sík topologiája alapot ad a felületek elméletének felépítéséhez. Síkháromszög kölcsönösen egyértelmű folytonos képét nevezzük háromszögnek; a felület háromszögeknek oly sorozata, hogy bármely háromszögnek mindegyik belső pontja csak egy háromszöghöz, mindegyik éle pontosan két háromszöghöz és mindegyik csúcsa véges számú cyclust alkotó háromszögekhez tartozik.

A felületek topologiáján, ezeknek egymásra való kölcsönösen egyértelmű folytonos leképezésein alapozódik a complex analyticus függvénytan topologicus, vagyis tisztán minőségi tárgyalása. — Ezt a problémát, a complex függvénytant a topologiából fogalmazni, azaz hosszuság és terület, általában metricus fogalmak nélkül megalapozni, *Brouwer* állitotta programmként 12 évvel ezelőtt tartott habilitátios előadásában; az azóta elmult időben sikerült néhány erre vonatkozó alapvető kérdést megoldani.

Tekintsük először az egységkör belsejének önmagára való kölcsönösen egyértelmű conformis leképezéseit. Egy ily leképezés mindenesetre topologicus (azaz kölcsönösen egyértelmű és folytonos), de nem megforditva; ugyanis egy topologicus leképezésnél lehetséges, hogy egy tartomány minden pontja önmagába megy át, anélkül, hogy a leképezés az egész körlemezen az azonosság volna; viszont conformis leképezésnél ez nem lehetséges. Hogy egy topologicus leképezés egy conformis leképezéssel legyen aequivalens, arra szükséges, de nem elégséges feltétel, hogy a transformationak, valamint minden nem azonos hatványának fixpontjai isoláltan feküdjenek. — Azon feltétel, hogy a transformationak egy véges számnál alacsonyabb hatványainál fellépő fixpontok halmaza a körlemezen mindenütt sűrű, az elégséges feltételt is adja, hogy e transformatio analyticusan kifejezhető legyen; ez esetben ugyanis a transformatio szakaszos, azaz egy bizonyos hatványa az azonos leképezést adja. Egy ilyen transformatio — ha még feltesszük, hogy megtartja a körlemez indicatrixát (irányitását) — a rotatio-tétel értelmében egy metricus forgatásnak kölcsönösen egyértelmű folytonos képe. — Más esetre még nem sikerült a körlemez conformis leképezésének topologicus jellemzése.

Hasonlóképen adódik a gömbfelület forgásainak jellemzése, mint a gömbfelületnek önmagára való egyértelmű folytonos, az indicatrixot megtartó, szakaszos leképezései. Továbbá a szabályos testek forgás-csoportjai, mint a gömbfelületnek az indicatrixot megtartó transformatioinak véges csoportjai.

Ezen eredményeim alapján bebizonyitotta *Brouwer*, hogy egy kétoldalu zárt felület önmagára való, az indicatrixot megtartó leképezéseinek véges csoportja aequivalens egy algebrai *Riemann*-féle felület önmagára való birationális transformatioinak csoportjával.

A sík egy translatiojának topologicus jellemzése még csak részben megoldott probléma. A síknak önmagára való topologicus, az indicatrixot megtartó, fixpont nélküli leképezése az egész sík felett egy translatio; ez *Brouwer translatio-tétele;* ez ugy értendő, hogy bármely pont köré meghatározható egy translatio-mező, azaz két végtelen vonaltól, melyek egyike képe a másiknak, határolt tartomány, melynek képe egy tőle teljesen különböző, egyik határvonalának másik oldalán fekvő ily tartomány. De jóllehet ily translatiomező construálható bármely pont köré, egy ily tartomány összes képei nem töltik ki szükségképen az egész síkot s igy a transformatio nem aequivalens egy közönséges translatioval. — Ha két különböző ilyen typusu leképezésből képezett csoportot tekintünk, melynek minden transformatioja ugyanily typusú, ez sem szükségképen azonos egy parallelogrammaticus translatiocsoporttal. — A translatiok jellemzésére valószinü módszernek tartom a folytonos csoportok által való jellemzést. Pontosabban fogalmazva, sejtésem a következő: a sík önmagára való topologicus, az indicatrixot megtartó leképzéseinek oly transitiv csoportja, melynek egyik nem azonos leképezésénél sincsen fixpont, azonos a complex számok összeadási csoportjával.

Ugyane módszerben, a folytonos csoportok alkalmazásában látom a conformis leképezés topologicus jellemzésére vezető utat s nem tartom lehetségesnek egyetlen ily leképezés önálló jellemzését.

Speciális függvények esetében a csoport vizsgálata is egyszerűsödik. A rationális függvények elméletében van néhány oly eredmény, mely remélhetővé teszi a reájok vonatkozó probléma teljes megoldását. — Az első feladat itten megállapitani a gömbfelület pontjainak olyan csoportokra osztását, mely alapjául szolgálhat egy rationális függvény argumentum elosztódásának. E problémát *Brouwer* oldotta meg a fentebb idézett rotatio-tétel segitségével, amennyiben kimutatta, hogy a gömbnek minden involutioja, azaz olyan szétosztása legfeljebb *n* pontból álló pontcsoportokra, hogy e pontcsoportok halmaza a gömbfelület topologicus képe, jellemezhető egy rationális függvény által oly értelemben, hogy két ugyanazon csoportba tartozó ponton e rationalis függvény egyenlő értékeket, különböző csoportokba tartozó pontokon különböző értékeket vesz fel. — Ehhez a tételhez kapcsolódóan állitom a következő, nehezebb természetű problémát: a rationális függvényt egyazon gömbfelületen jellemezni. E probléma természetének ismeretére fontos adatokat szolgáltatnak Gaston *Julia*-nak az utolsó három év folyamán közölt vizsgálatai a rationális függvények iteratioiról. Itten bizonyos attractios és repulsios pontok lépnek fel, melyekhez közelednek, illetve távolodnak egy pont iterált képei. A mi problémánk tárgyalásánál a kiindulási pontot épen az ezen vizsgálatok során felderült convergentia-tulajdonságok képezik. — Mint legegyszerűbb esetet megemlitem a következő tételt a négyzetes függvény jellemzéséről: a síknak önmagára való kölcsönös (1, 2) értelmű folytonos leképezése, melynél két attractios pont és egy ezeket elválasztó *Jordan*-görbén mindenütt sűrű repulsios ponthalmaz van, azonos a $w=z^2$ függvénnyel.

Evvel a problémával teljesen analog az algebrai függvényeknek egyazon gömbfelületen való jellemzésének problémája. A célszerűségi szempont szükségessé teszi először is az algebrai függvények iteratioira vonatkozó, a *Julia* eredményeihez analog eredmények megállapitását. Erre vonatkozó eddigi eredményem, hogy az algebrai iteratioknál nyert képek általában az egész síkon mindenütt sűrűn feküsznek, — egy körülmény, mely megkönnyiti a megforditás lehetőségét s egyben a kivételes algebrai függvényeket, mint a singuláris *Riemann*-felületeknek megfelelő függvényeket adja. — E téren végleges eredmények még nincsenek.

Egy a tárgyalt eset után következő legegyszerűbb eset az automorph függvényeké. Ami az argumentum elosztódását illeti, ismét *Brouwer* adta ennek jellemzését, az involutio-fogalom segitségével. Következnék a függvények értékelosztódásának hozzákapcsolódó problémája, mely megoldásra vár.

Mind e kérdés egységes megoldását adná az általános conformis leképezés topologicus jellemzése. Ilyen szempontból tekintve a kérdést, nem tűnik lehetetlennek, sőt a tartalmához közeledünk annak, a göttingeni mathematikusok között évek óta emlegetett problémának, hogy a nagy *Picard*-tételt topologicusan fogalmazzuk és bizonyitsuk be, mint ahogy az egész függvénytan is quantitativból qualitativvá változnék át, ez ami egyes disciplinákra — elsősorban a projectiv geometriát emlitem — már eddig is megtörtént.

Sur les fondements topologiques de l'Analyse et de la Géométrie.

Leçon d'ouverture faite le 15 décembre 1921

par M. B. de KERÉKJÁRTÓ.

(Extrait de l'article précédent).

Je considère d'abord les transformations d'un type d'ordre linéaire, dénombrable et dense en soi. Une transformation biunivoque de cet ensemble en lui-même, conservant les relations d'ordre et satisfaisant à l'axiome d'Archimède, est appelée une translation. Un groupe parfaitement transitif et commensurable de telles translations est équivalent au groupe des additions des nombres rationnels. — J'envisage encore le groupe des multiplications et le groupe des opérations algébriques par rapport à un type d'ordre linéaire, dénombrable et dense en soi, et par rapport au continu linéaire. — Ensuite j'introduis les théorèmes fondamentaux de la topologie plane, savoir le théorème de M. *Jordan* et ses conséquences, et je fais connaître les fondements axiomatiques posés par M. *Hilbert* pour la géométrie plane. — Puis je passe à la topologie des surfaces et spécialement au problème de M. *Brouwer* qui demande de fonder la théorie des fonctions analytiques sur les notions de la topologie. Je considère d'abord les transformations topologiques (c'est-à-dire biunivoques et continues) du cercle en lui-même; il y a, en général, des conditions nécessaires mais non suffisantes pour qu'une telle transformation soit équivalente à une représentation conforme; mais, si la transformation est périodique, elle est nécessairement équivalente à une rotation ou à une symétrie, c'est-à-dire à une représentation conforme. Il y a des résultats analogues sur les transformations périodiques et les groupes finis de la sphère. Un théorème général de M. *Brouwer* dit qu'un groupe fini de transformations topologiques d'une surface bilatérale et fermée en elle-même, conservant l'indicatrice de la surface, est équivalent au groupe des transformations birationnelles d'une surface de *Riemann* algébrique en elle-même. — Le théorème de translation dû à *M. Brouwer* donne naissance à un problème concernant les groupes continus, consistant à caractériser le groupe des additions des nombres complexes comme groupe transitif de translations topologiques. — Il me semble que c'est l'application des groupes continus qui pourrait conduire à caractériser topologiquement la représentation conforme. Dans le cas des fonctions rationnelles, il y a quelques résultats remarquables qui sont en rapport avec le problème indiqué ; d'une part M. *Brouwer* a caractérisé la distribution des valeurs de la variable comme involutions topologiques de la sphère ; d'autre part les recherches de M. *Julia* sur les itérations des fonctions rationnelles ont abouti à des découvertes importantes. Sur les itérations des fonctions algébriques j'ai été conduit à quelques résultats analogues à ceux de M. *Julia*. Le problème de caractériser les groupes automorphes fut posé et résolu par M. *Brouwer ;* il reste le probléme de caractériser les fonctions qui appartiennent à ces groupes. — Une solution générale de ces questions serait fournie, si on réussissait à caractériser topologiquement la représentation conforme ; de ce point de vue, il me semble probable qu'on pourra fonder et démontrer le théorème de M. *Picard* par la topologie.

Zur Theorie der mehrdeutigen konformen Abbildungen.

Von TIBOR RADÓ.

Wir werden uns mit $(1, m)$-deutigen konformen Abbildungen schlichter Bereiche auf einander beschäftigen. Unter einem Bereiche verstehen wir, wie üblich, eine nur aus inneren Punkten bestehende zusammenhängende Punktmenge der schlichten Ebene. Die Aussage: der Bereich G ist auf den Bereich G' $(1, m)$-deutig konform bezogen, soll Folgendes bedeuten. In G ist eine daselbst meromorphe Funktion $f(z)$ gegeben, die nur Werte annimmt, welche in G' liegen; und wenn α' in G' gelegen ist, so hat die Gleichung $f(z) = \alpha'$ genau m Wurzeln in G, jede Wurzel mit der entsprechenden Multiplicität gerechnet; dabei bedeutet m eine endliche positive ganze Zahl.[1])

Den Anstoss zu den folgenden Betrachtungen hat ein Satz des Herrn *Fatou*[2]) gegeben, den wir in unserer Terminologie wie folgt aussprechen können:

Jede $(1, m)$-deutige konforme Abbildung des Bereiches $|z| < 1$ auf sich selbst wird durch eine rationale Funktion geleistet.

Zum Beweise zieht Herr *Fatou* die tiefen Sätze über die Randwerte der im Einheitskreise beschränkten analytischen Funk-

---

[1]) Mit Hilfe des *Brouwer*'schen Begriffes der *topologischen Involution* könnten einzelne Sätze dieser Arbeit topologisch formuliert und bewiesen werden.

[2]) *Fatou*, Sur les équations fonctionnelles, Bulletin de la Soc. Math. de France, 1922. p. 174.

tionen heran. Herr *F. Riesz*, der meine Aufmerksamkeit auf diesen Satz gelenkt hat, teilte mir einen elementaren Beweis mit; durch ein rekurrentes Verfahren ging er auf den Fall (1,1) zurück, wo die Abbildung bekanntlich linear ist. Durch einen oft gebrauchten Kunstgriff, der von den Herrn *Carathéodory* und *Fejér* herrührt[3]), führte ich den Satz auf das *„Prinzip des absoluten Betrages"* zurück. Diese Betrachtungen haben mich dann zu den Sätzen geführt, die den Inhalt der vorliegenden Arbeit bilden.

I.

Hilfssatz a). *Seien G, G' zwei schlichte Bereiche und $f(z)$ eine in G meromorphe Funktion, welche eine $(1, m)$-deutige konforme Abbildung von G auf G' definiert.*

Wenn dann in G die Folge α_k gegen einen Randpunkt von G konvergiert, so konvergiert in G' die Folge $f(\alpha_k)$ nie gegen einen inneren Punkt von G.

Beweis. Man setze $\alpha' = \lim f(\alpha_k)$ und nehme an, dass α' innerer Punkt von G' ist. Seien $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ die Wurzeln der Gleichung $f(z) = \alpha'$, und $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ihre Multiplicitäten, so dass also $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = m$ ist. Aus den Elementen der Funktionentheorie ist bekannt, dass man um die Punkte $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, \alpha'$ kleine Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r, K$ schlagen kann, so dass wenn z' in K liegt, die Gleichung $f(z) = z'$ in den Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_r$ bzw. $n_1, n_2, \ldots, n_r$, also zusammen m Wurzeln hat. Ist nun k gross genug, so wird α_k ausserhalb der Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r$, $f(\alpha_k)$ aber in K liegen. Die Gleichung $f(z) = f(\alpha_k)$ hat dann mehr als m Wurzeln, nämlich m Wurzeln in $K_1, K_2, \ldots, K_r$ und ausserdem noch die Wurzel α_k.

Satz 1. (*Satz von Fatou*). *Wenn $f(z)$ eine $(1, m)$-deutige konforme Abbildung des Bereiches $|z| < 1$ auf sich selbst definiert, so ist $f(z)$ rational.*

Beweis. Aus Hilfssatz *a*) folgern wir, dass für $|z| \to 1$ auch $|f(z)| \to 1$. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Wurzeln von $f(z) = o$ im Bereiche $|z| < 1$, und man bilde das Produkt

[3]) *Carathéodory-Fejér*, Remarques sur le théorème de Jensen, Comptes Rendus, 16. juillet, 1907.

$$P(z) = \prod_{i=1}^{m} \frac{z-\alpha_i}{\bar{\alpha}_i z - 1}$$

Dann ist bekanntlich[4]) $|P(z)| = 1$ für $|z| = 1$. Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{P(z)}$$

ist für $|z| < 1$ regulär und von Null verschieden; für $|z| \to 1$ hat man offenbar $|g(z)| \to 1$. Nach dem *„Prinzip des absoluten Betrages"* ist also $g(z)$ eine Konstante.

II.

Der Hilfssatz *a*) gestattet die folgende Umkehrung:[5])

Satz 2. Seien G, G' zwei schlichte Bereiche, und $f(z)$ eine in G meromorphe Funktion, welche folgenden Bedingungen genügt:

A) sie nimmt in G nur Werte an, die in G' liegen,

B) wenn in G die Folge α_n gegen einen Randpunkt von G konvergiert, so konvergiert in G' die Folge $f(\alpha_n)$ nie gegen einen inneren Punkt von G'.

Dann definiert $f(z)$ eine (1, *m*)*-deutige konforme Abbildung von G auf G', wobei m eine endliche positive ganze Zahl ist.*

Beweis. Sei G'' die Menge der Werte, die $f(z)$ in G annimmt. Nach *A*) ist G'' ein Bereich, der ganz im Inneren von G' liegt, (wegen *B*) kann nämlich $f(z)$ keine Konstante sein) und keinen Randpunkt in G' haben kann. Denn sei α' ein *innerer* Punkt von G', der *Randpunkt* von G'' ist. Dann gibt es in G eine konvergente Folge $\alpha_n \to \alpha$, so dass $f(\alpha_n) \to \alpha'$. Wenn dann α innerer Punkt von G wäre, so hätte man $f(\alpha) = \alpha'$, und α' wäre innerer Punkt von G''. Wegen *B*) kann α auch kein Randpunkt von G sein. Der Bereich G'' ist also mit G' identisch.

Ist also α' in G' gelegen, so hat $f(z) = \alpha'$ wenigstens eine Wurzel in G. Die Anzahl der Wurzeln ist stets *endlich*. Sonst

---

4) Die einzelnen Faktoren definieren nämlich lineare Transformationen des Einheitskreises in sich.

5) Vgl. *Carathéodory u. Rademacher*, Über die Eineindeutigkeit im Kleinen u. im Grossen stetiger Abbildungen von Gebieten. Archiv d. Math. u. Phys. 1907. Unser Beweis ist dem dortigen nachgebildet.

könnte man in G eine konvergente Folge $\alpha_n \rightarrow \alpha$ bestimmen mit $f(\alpha_n) = \alpha'$. Wegen B) kann α kein Randpunkt von G sein, und auch kein innerer Punkt von G; denn im zweiten Falle wäre $f(z)$ eine Konstante.

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(z) = \alpha'$, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ihre Multiplicitäten, und man setze $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = m$. Um die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha'$ kann man kleine Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r, K$ schlagen, so dass wenn β' in K liegt, die Gleichung $f(z) = \beta'$ in den Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_r$ bzw. genau $n_1, n_2, \ldots, n_r$ Wurzeln hat. Dies bleibt richtig, wenn man $K_1, K_2, \ldots, K_r$ festhält, K aber beliebig verkleinert. Möglicherweise könnten noch Wurzeln vorhanden sein, die *ausserhalb* der Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r$ liegen. Wenn aber K hinreichend klein ist, so kann das nicht vorkommen. Sonst könnte man in G eine konvergente Folge $a_k \rightarrow a$ angeben, so dass $f(a_k) \rightarrow \alpha'$, und a von den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ verschieden ist. Wegen B) wäre a innerer Punkt von G, es müsste also $f(a) = \alpha'$ sein, und die Gleichung $f(z) = \alpha'$ hätte nicht nur die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, sondern ausserdem noch die Wurzel a. Die Menge der Punkte z' von G', für welche die Gleichung $f(z) = z'$ ebenfalls genau m Wurzeln hat, ist hiernach eine offene Punktmenge. Diese hat keinen Randpunkt in G'; denn jeder Punkt von G' ist *innerer* Punkt einer solchen Punktmenge und kann deshalb kein *Randpunkt* einer anderen sein. Die soeben erklärte Menge fällt also mit G' zusammen.

Damit ist Satz 2. vollständig bewiesen. Als eine Anwendung desselben beweisen wir eine Verallgemeinerung des bekannten *Picard-Darboux*'schen Satzes über ein-eindeutige konforme Abbildung im Grossen.[6])

Satz 3. Seien Γ, Γ' zwei einfache geschlossene Jordan'sche Kurven, G, G' die von ihnen eingeschlossenen Gebiete. Sei ferner $f(z)$ eine in G reguläre Funktion, welche der einzigen Bedingung genügt: wenn in G die Folge a_n gegen einen Punkt a auf Γ konvergiert, so konvergiert die Folge $f(a_n)$ nie gegen einen nicht auf Γ' gelegenen Punkt.

Dann definiert $f(z)$ eine $(1, m)$-deutige konforme Abbildung von G auf G', wo m endlich ist. Die Funktion $f(z)$ ist ausserdem

[6]) Siehe etwa die in Fussnote 5) zitierte Arbeit der Herrn *Carathéodory* u. *Rademacher.*

stetig auf Γ, und wenn α' ein Punkt auf Γ' ist, so hat die Gleichung $f(z) = \alpha'$ genau m verschiedene Wurzeln auf Γ.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass $f(z)$ in G beschränkt ist. Dann folgt in bekannter Weise, das der Wertevorrat von $f(z)$ in G liegt und daraus der erste Teil unseres Satzes aus Satz 2. Auf Grund des Satzes über die Ränderzuordnung bei $(1, 1)$-deutiger konformer Abbildung können wir bezüglich des zweiten Teiles annehmen, dass Γ und Γ' mit dem Einheitskreise zusammenfallen. Dann aber hat nach Satz 1. $f(z)$ die Form:

$$f(z) = C \prod_{i=1}^{m} \frac{z - \alpha_i}{\bar{\alpha}_i z - 1}$$

wo $|C| = 1, |\alpha_i| < 1$ $(i=1, 2, \ldots, m)$

Es ist dann alles bewiesen, wenn wir noch zeigen, dass $f'(z)$ am Einheitskreise nirgends verschwindet. Sei β ein Punkt am Einheitskreise; dann liegt $f(\beta) = \beta'$ ebenfalls am Einheitskreise. Wenn $f'(\beta) = o$ ist, so bildet $f(z)$ die Umgebung von β ein-eindeutig auf eine Windungsfläche ab, die β' als Windungspunkt enthält. Bei dieser Abbildung werden die Winkel um β *wenigstens verdoppelt*, und man könnte deswegen einen Weg angeben, der von β ausgehend im Inneren des Einheitskreises verlauft, so dass der entsprechende von β' ausgehende Weg ausserhalb des Einheitskreises liegt. Das ist aber nicht möglich; denn für $|z| < 1$ hat man $|f(z)| < 1$.

III.

Für *mehrfach* zusammenhängende Bereiche gilt der folgende Satz:

Satz 4. Sei G ein Kreisbereich, der von N Kreisen begrenzt ist. Für $N > 1$ gibt es dann keine $(1, m)$-deutige konforme Abbildung von G auf sich selbst, wo m endlich und > 1 wäre.

Für $N > 2$ gilt der Satz auch dann, wenn einzelne oder auch alle Begrenzungskreise in Punkte ausarten.

Beweis. Es seien

$$K_1, K_2, \ldots, K_N \quad N > 1$$

die Begrenzungskreise, und $f(z)$ eine Funktion, welche eine $(1, m)$-

deutige konforme Abbildung von G auf sich selbst definiert. Sei ferner $f_n(z)$ die n-te iterierte Funktion von $f(z)$, also

$$f_1(z) = f[f(z)], \ldots, f_n(z) = f[f_{n-1}(z)]$$

Aus Satz 2. folgt dann, dass $f_n(z)$ eine $(1, m^n)$-deutige konforme Abbildung von G auf sich selbst bestimmt. Wir werden beweisen, dass für einen geigneten Index $n = r$ diese Abbildung $(1, 1)$-deutig ist, woraus dann $m = 1$ folgt.

Aus Hilfssatz a) folgt leicht, dass durch $f(z)$ eine Permutation

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & N \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_N \end{pmatrix}$$

der Begrenzungskreise hervorgerufen wird im folgenden Sinne. Ist a_n eine Folge in G, welche alle ihre Häufungspunkte etwa am Kreise K_1 hat, so liegen alle Häufungsstellen der Folge $f(a_n)$ am Kreise K_{i_1}. Es gibt also sicher eine iterierte Funktion, welche in diesem Sinne alle Begrenzungskreise fest lässt; denn $f_n(z)$ bewirkt offenbar die Permutation S^n, und für einen geeigneten Index $n=r$ hat man $S^r=1$.

Wir wollen zunächst den besonders einfachen Fall $N=2$ vorwegnehmen. Wir können gleich voraussetzen, dass K_1 und K_2 konzentrisch sind mit dem gemeinsamen Mittelpunkte $z=o$. Dann ist $\frac{f_r(z)}{z}$ eine in G reguläre und von Null verschiedene Funktion, und wenn z gegen den Rand konvergiert, so konvergiert $\left|\frac{f_r(z)}{z}\right|$ gegen 1. Folglich ist diese Funktion eine Konstante, also

$$f_r(z) = Cz$$

Es ist also $m^r=1$, w. z. b. w.

Sei nun $N > 2$.[7]) Herr *F. Riesz* hat bemerkt, dass die für $N=2$ entwickelte Schlussweise in gewissem Sinne auch für $N > 2$ bestehen bleibt. Mit seiner Erlaubnis teile ich hier seinen Beweis mit.

[7] Für diesen Fall kann man rein topologisch mit Hilfe des Involutionsbegriffes zum Ziele kommen. Dabei kommt der Satz des Herrn *Brouwer* zur Anwendung, nach welchem *jede topologische Involution der vollen Ebene durch eine rationale Funktion definiert werden kann*. Da mir die betreffende Arbeit des Herrn *Brouwer* nicht zugänglich war, ziehe ich vor, funktionentheoretisch zu schliessen.

Der erste Schritt besteht darin, dass man die Regularität von $f_r(z)$ am Rande feststellt. Wir erinnern daran, dass $f_r(z)$ alle Begrenzungskreise fest lässt, und wenden den folgenden Hilfssatz an:

Hilfssatz b). Sei $\varphi(z)$ *im Bereiche* $o < \varrho < |z| < 1$ *regulär; für* $|z| \to 1$ *sei auch* $|\varphi(z)| \to 1$. *Dann ist* $\varphi(z)$ *für* $|z| = 1$ *regulär und man erhält eine analytische Fortsetzung von* $\varphi(z)$ *dadurch, dass man sowohl die Variable wie auch den Funktionswert am Einheitskreise spiegelt.*

Beweis. Offenbar genügt es, die Stetigkeit für $|z| = 1$ nachzuweisen. Sei σ ein kleiner Bogen des Einheitskreises. Dann können wir einen kleinen einfach zusammenhängenden Bereich B angeben, der σ am Rande enthält und in welchem $\varphi(z)$ regulär und von Null verschieden ist. Die Funktion $\log \varphi(z)$ ist dann in B regulär und eindeutig, und der reelle Teil derselben verschwindet stetig am Kreisbogen σ. Diese Funktion ist demzufolge regulär auf σ,[8]) dasselbe gilt dann für die Funktion $\varphi(z)$.

Diesem Hilfssatze zufolge kann $f_r(z)$ über alle Begrenzungskreise hinaus analytisch fortgesetzt werden. Wir können gleich voraussetzen, dass K_1 und K_2 konzentrisch sind mit dem Mittelpunkte $z = o$, und dass die übrigen Begrenzungskreise im Ringe zwischen diesen beiden liegen. Nun erweitern wir den Bereich G und die Funktion $f_r(z)$ durch successive Spiegelung an diesen inneren Begrenzungskreisen bzw. an den Kreisen, die neu hinzutreten. Auf diese Weise erhalten wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten einen Kreisbereich G', der ebenfalls von K_1, K_2 und von einer endlichen Anzahl von weiteren Kreisen begrenzt wird, die im Ringe zwischen diesen beiden liegen. Für uns ist die elementare Tatsache wichtig, dass die Radien dieser inneren Kreise durch genügend weit fortgesetzte Spiegelung unterhalb eine beliebig vorgeschriebene positive Grösse gebracht werden können.[9]) Aus Satz 2. folgt, dass die fortgesetzte Funktion $f_r(z)$ auch für den Bereich G' eine $(1, m^r)$-deutige konforme Abbildung bestimmt, wobei alle Begrenzungskreise fest bleiben.

---

[8]) Siehe etwa *Osgood,* Analytische Funktionen komplexer Grössen, Encyklopädie II. B. 1. Seite 57.

[9]) Siehe *Koebe,* Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche etc, Jahresbericht d. deutschen Math.-Vereinigung, Bd. XV. Heft 2.

Wir bilden nun die Funktion $\frac{f_r(z)}{z}$. Dieselbe ist im ganzen Bereiche G' regulär und von Null verschieden; auf K_1 und K_2 ist ihr absoluter Betrag gleich 1; auf den übrigen Begrenzungskreisen aber wird $\left|\frac{f_r(z)}{z}\right|$ beliebig wenig von 1 abweichen. Denn liegt z auf einem inneren Begrenzungskreise K von G', so liegt auch $f_r(z)$ auf diesem Kreise; der Kreis K liegt dabei im Ringe zwischen den *festen* konzentrischen Kreisen K_1 und K_2, und sein Radius wird beliebig klein. In einem inneren Punkte z_0 von G wird also $\left|\frac{f_r(z_0)}{z_0}\right|$ a fortiori beliebig wenig von 1 abweichen, folglich wird $\frac{f_r(z)}{z}$ überhaupt eine Konstante vom absoluten Betrage 1 sein. Es ist also $f_r(z) = Cz$. Es muss aber $C = 1$ sein, denn es bleibt ja ausser K_1 und K_2 noch *wenigstens* ein Kreis fest, der mit den beiden früheren nicht konzentrisch ist.

Ich bemerke, dass dadurch auch der folgende Satz mit bewiesen ist:[10])

Die identische Abbildung ist die einzige ein-eindeutige konforme Abbildung eines von mehr als zwei Kreisen begrenzten Kreisbereiches auf sich selbst, welche der Bedingung genügt, jeden Begrenzungskreis einzeln in sich überzuführen.

Wir betrachten nun den Fall, wo sich einzelne Begrenzungskreise auf Punkte reducieren. Es wird genügen, den Beweis für den Fall zu führen, dass alle Begrenzungskreise ausarten[11]); die Übergangsfälle erledigt man leicht.

Sei also G die volle Ebene mit Ausschluss von N Punkten. (N endlich und > 2). Auf Grund des Hilfssatzes a) erkennt man: ist $f(z)$ die Abbildungsfunktion, so ist dieselbe auch in den Grenzpunkten meromorph, also überhaupt rational. Für einen geigneten Index $n = r$ wird $f_r(z)$ alle Grenzpunkte fest lassen. Wir können annehmen, dass $0, 1, \infty$ unter den Grenzpunkten enthalten sind. Dann ist $f_r(z)$ ein Polynom vom grade m^r, das nur für $z=0$ verschwindet, also von der Form

$$f_r(z) = C z^{m^r}$$

---

[10]) Siehe *Koebe* l. c.

[11]) Durch den in Fussnote 7) erwähnten *Brouwer*'schen Satz wird es möglich, den allgemeinen Fall auf diesen speziellen zurückzuführen.

ist. Wegen $f_r(1)=1$ ist $C=1$, und da die Gleichung $f_r(z)=1$ nur die Wurzel $z=1$ haben soll, ist $f_r(z)=z$. $f(z)$ selbst, als rationale Funktion ersten Grades, ist linear.

Satz 4. kann in evidenter Weise auf beliebige endlich vielfach zusammenhängende Bereiche verallgemeinert werden; denn ein solcher Bereich kann ein-eindeutig konform auf einen Kreisbereich bezogen werden. Für unendlich vielfach zusammenhängende Bereiche braucht der Satz nicht zu gelten; die Iteration der rationalen Funktionen liefert Beispiele dafür.[12])

IV.

Es liegt nahe zu fragen, wie es mit den $(1, m)$-deutigen konformen Abbildungen eines Kreisbereiches auf einen *anderen* steht. Da werden wir uns auf eine Bemerkung beschränken, die zu einem funktionentheoretisch interessanten Resultate führt.

Der Kreisbereich G mit N Begrenzungskreisen sei auf einen Kreisbereich G' mit N Begrenzungskreisen $(1, m)$-deutig konform bezogen. Für $N>2$ ergibt sich, dass von den $(1, 1)$-deutigen Abbildungen abgesehen stets $N' < N$ sein muss. *Ist es nun möglich, dass $N'=1$ wird?* Sei dann G' das Innere des Einheitskreises. Die Abbildungsfunktion muss dann eine im Innern und am Rande von G reguläre nicht konstante Funktion sein, welche am ganzen Rande von G den absoluten Betrag 1 hat.

Man kann leicht Beispiele für diesen extremen Fall bilden. Man betrachte z. B. die rationale Funktion:

$$f(z)=z+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}+\cdots+\frac{1}{z-n}$$

Man suche den Ort der Punkte, für welche $|f(z)|=R$ ist Dann erkennt man: ist R gross genug, so erhält man $n+1$ einfache geschlossene analytische Kurven, die je eine Umgebung der Punkte $z=1, 2, \ldots, n, \infty$ abgrenzen, und welche zusammen ein $(n+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet D abgrenzen, in welchem $f(z)$ regulär ist und am Rande den konstanten absoluten Betrag R hat. Bildet man jetzt den Bereich D auf einen Kreisbereich

---

[12]) Siehe *Fatou*, l. c. Seite 166, Exemple IV.

G ab, und verpflanzt in G die Funktion $\frac{f(z)}{R}$, so hat man das gewünschte Beispiel vor sich.

Wie im Falle $N=1$, so sind auch die für $N > 1$ auftretenden Abbildungsfunktionen in der ganzen Ebene eindeutig. Im Falle $N=1$ sind wir auf rationale Funktionen gekommen; für $N>1$ erhalten wir hingegen Funktionen mit starken Singularitäten.

Über die Tschebyscheffschen Polynome.

Von GABRIEL SZEGÖ in Berlin.

Wir betrachten eine geschlossene, doppelpunktlose, stetige Kurve C in der komplexen x-Ebene und stellen für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Aufgabe, die Potenzfunktion x^n auf der Kurve C durch ein lineares Aggregat von niedrigeren Potenzen der Folge

$$(1) \qquad 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,$$

d. h. durch ein Polynom $(n-1)$-ten Grades möglichst genau zu approximieren. Es gibt bekanntlich[1]) ein einziges Polynom $K_{n-1}(x)$ dieser Art und wenn

$$x^n - K_{n-1}(x) = T_n(x)$$

gesetzt wird ($T_n(x)$ ist das Polynom n-ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1, welches unter allen anderen derselben Form ein möglichst kleines absolutes Maximum auf C besitzt), so gilt für

$$\mu_n = \operatorname{Max} |T_n(x)| \text{ auf } C$$

die von *Faber* herrührende Grenzwertgleichung

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\mu_n} = \gamma.$$

Hierbei ist γ eine für C charakteristische positive Zahl, die sich als der Radius des (eindeutig bestimmten) Kreises interpretieren lässt, auf dessen Äussere man das Äussere von C mit Erhaltung

---

1) Vgl. einen allgemeineren Satz von *L. Tonelli*, I polinomi d'approssimazione di Tschebychev [Annali di matematica, Bd. 15 (1908), S. 47—119] S. 108. — Ferner *Ch. de la Vallée Poussin*, Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe [Bulletin de l'Acad. R. de Belgique, 1911, S. 199—211]. — *G. Faber*, Über Tschebyscheff'sche Polynome [Journal für Mathematik, Bd. 150 (1919), S. 79—106].

des unendlich fernen Punktes und mit dem Abbildungsmodul 1 darin abbilden kann.[2])

In neueren Arbeiten ist immer mehr zum Vorschein gekommen, dass diese Polynome nicht nur mit dem Problem der konformen Abbildung, sondern auch mit manchen interessanten potenzreihen-theoretischen Fragen zusammenhängen.[3]) Ich will in der vorliegenden Arbeit bezüglich dieser Polynome eine Aufgabe behandeln, die einerseits auf eine von *C. Müntz* beantwortete Frage im Gebiet der reellen Approximationen[4]) erinnert, anderseits mit einem vielfach untersuchten Satz von *Fabry* (Lückensatz) aufs engste zusammenhängt.

Diese Frage lässt sich wie folgt formulieren. Nach (2) wird die „Güte" der Approximation von x^n durch niedrigere Potenzen der Folge (1) gewissermassen durch die Zahl γ gemessen. Darf man nun in (1) eine (endliche oder unendliche) Teilfolge

$$(l) \qquad x^{l_1},\, x^{l_2},\, \ldots,\, x^{l_\nu},\, \ldots \qquad (0 \leqq l_1 < l_2 < \ldots < l_\nu < \ldots)$$

unterdrücken, ohne die durch γ gegebene Güte der Approximation zu ändern? Genauer: Man approximiere x^n durch lineare Aggregate von denjenigen Potenzen $1, x, \ldots, x^{n-1}$, die in (l) nicht vorkommen ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Bezeichnet hierbei $\mu_n^{(l)}$ die untere Grenze sämtlicher Maxima auf C, so ist $\{\mu_n^{(l)}\}$ eine ganz bestimmte Folge von nichtnegativen Zahlen, die durch C und die Folge (l) eindeutig bestimmt ist. Die Frage lautet dann: Bei welcher Wahl von (2) gilt wieder für jede Kurve C

$$(2') \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\mu_n^{(l)}} = \gamma.$$

---

[2]) Vgl. *G. Faber*, a. a. O. [1]), sowie: Über Potentialtheorie und konforme Abbildung [Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie 1920, S. 49—64] S. 55.

[3]) Vgl. *F. Carlson*, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten [Math. Zeitschrift, Bd. 9 (1921), S. 1—13]. — *G. Pólya*, Sur les séries entières à coefficients entiers [Proc. of the Lond. Math. Society, Series (2), Vol. 21 (1922), S. 22—38]. — *G. Szegő*, Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten [Sitzungsber. der preussischen Akad. 1922, S. 88—91]. — *G. Szegő*, Tschebyscheff'sche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen [Math. Ann Bd 87 (1922), S. 90—111].

[4]) Über den Approximationssatz von *Weierstrass* [Schwarz-Festschrift 303—312 (1914)].

Dass $\gamma \leqq \sqrt[n]{\mu_n^{(l)}}$ ist, folgt unmittelbar aus einer *Faber*'schen Bemerkung.[5]) Ferner ist es klar, dass man in (1) jedenfalls eine endliche Anzahl von Gliedern $x^{l_1}, x^{l_2}, \ldots, x^{l_k}$ unterdrücken darf, ohne die Gleichung (2) zu stören. Bezeichnet nämlich etwa l_k die grösste der unterdrückten Exponenten, so ist für $n \geqq l_k + 1$ stets $\mu_n^{(l)} \leqq \mu_{n-l_k-1}$, wie man durch Betrachtung von $x^{l_k+1} K(x)$ unmittelbar einsieht, wobei $K(x)$ ein beliebiges Polynom vom Grade $n - l_k - 1$ mit dem höchsten Koeffizienten 1 bezeichnet.

Ich zeige in §§ 1 und 2 mittels einer an *Faber*[6]) anschliessenden Konstruktion, dass die Folge (l) gewiss die verlangte Eigenschaft besitzt, sobald die l_ν so rapid anwachsen, dass

$$(3) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{l_\nu}{\nu} = \infty$$

ist. In § 3 verweise ich dann kurz auf den Zusammenhang, der zwischen diesem Satz und dem *Fabry*'schen Lückensatz besteht.

Ohne darauf näher einzugehen, möchte ich hier noch eine andere Approximationsaufgabe erwähnen, die man mit den gleichen Hilfsmitteln behandeln kann. Man kann nämlich bei der Approximation von x^n, anstatt das Fehlen von gewissen Gliedern in (1) zu fordern, die *Vorzeichen* sämtlicher Glieder beliebig vorschreiben und fragen, ob die durch γ gegebene Güte der Approximation noch erhalten bleibt. Besitzt die Kurve C die Eigenschaft, dass die Potenzreihenentwicklung der in § 1 definierten Funktion $\frac{1}{\varphi(z)}$ lauter nichtnegative Koeffizienten aufweist, so ist dies sicher der Fall, sobald die Indizes $l_1', l_2', \ldots, l_\nu', \ldots$, für welche in der Folge der gegebenen Vorzeichen ein Zeichenwechsel eintritt, derselben Wachstumsbedingung wie (3) genügen. Dieser Satz steht

---

[5]) Ist $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ irgend ein Polynom n-ten Grades, in welchem x^n den Koeffizienten 1 hat, so ist Max $|P(x)|$ auf C mindestens gleich γ^n. Beweis: Ist $\psi(x) = x + \alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \alpha_2 x^{-2} + \ldots$ die Abbildungsfunktion des Äussern von C auf $|\psi(x)| > \gamma$, so ist $P(x)\,[\psi(x)]^{-n}$ regulär ausserhalb von C, ist 1 für $x = \infty$ und sein Maximum auf C ist gleich γ^{-n} Max $|P(x)|$; hieraus folgt die Behauptung.

[6]) Über polynomische Entwicklungen II. [Math Ann. Bd. 64 (1907), S 116—135] § 2, S. 118 — Die Idee der Anwendbarkeit der in § 2 benutzten ganzen Funktionen verdanke ich einer Unterhaltung mit Herrn *Ostrowski*.

in ähnlicher Beziehung zu einem (den *Fabry*'schen verallgemeinernden) Satz von *Szász*,[7]) wie der obige zum *Fabry*'schen Lückensatz.

§ 1.

Wir bilden das Äussere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das *Innere* eines Kreises um den Nullpunkt der z-Ebene ab, u. zw. so, dass die Abbildungsfunktion die Form

$$x = \varphi(z) = \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{4}$$

habe. Der Radius dieses Kreises ist durch C eindeutig bestimmt und ist gleich $\frac{1}{\gamma}$, wenn γ den oben festgelegten Sinn hat.

Eine von *Faber* herrührende, aber von ihm nur in speziellen Fällen benutzte Konstruktion — vgl. a. a. O.[6] — führt unmittelbar auf eine ausgedehnte Klasse von Polynomen, die u. a. auch den Beweis des oben formulierten Satzes ermöglichen. In der Tat sei $G(\xi)$ eine in der ganzen ξ-Ebene (auch für $\xi = \infty$) mit Ausnahme von $\xi = 1$ reguläre analytische Funktion mit der Potenzreihenentwicklung

$$G(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n,$$

die dann offenbar den Konvergenzradius 1 hat. Man setze

$$G(\xi) = G\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{x}{\varphi(z)}\right)^n. \tag{5}$$

Liegt x im Innern oder auf der Kurve C, während z auf einen festen Kreis $|z| \leqq r < \frac{1}{\gamma}$ eingeschränkt ist, so existiert sicherlich eine (von r abhängende) positive Konstante ω_r derart, dass

$$|1 - \xi| = \left|1 - \frac{x}{\varphi(z)}\right| > \omega_r$$

ist. Wir haben also für solche x und z

$$\left|G\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right)\right| < M_r, \tag{6}$$

[7]) Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichlet'schen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches [Math. Ann. Bd. 85 (1922) S. 99—110].

wo M_r nur von r abhängt. Man erhält nun aus (5), indem man überlegt, dass $\frac{1}{\varphi(z)}$ eine Potenzreihenentwicklung der Form $z + c_2' z^2 + c_3' z^3 + \ldots$ besitzt, nach Umordnen nach den Potenzen von z:

$$G\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) z^n, \tag{7}$$

wobei $Q_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten g_n bezeichnet. Mit Rücksicht auf (6) folgt hieraus:

$$\left| Q_n(x) \right| < \frac{M_r}{r^n},$$

d. h. es ist gleichmässig auf C

$$\limsup_{n=\infty} \left| Q_n(x) \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{r},$$

oder da r beliebig nahe an $\frac{1}{\gamma}$ gewählt werden kann,

$$\limsup_{n=\infty} \left| Q_n(x) \right|^{\frac{1}{n}} \leq \gamma. \tag{8}$$

Die nachfolgenden Betrachtungen stützen sich auf die zweckmässige Wahl der Funktion $G(\xi)$. Hierbei muss noch eine kleine Schwierigkeit überwunden werden, nämlich dass der höchste Koeffizient des Polynoms $Q_n(x)$ nicht notwendig 1, sondern g_n ist. Dies geschieht so, dass man $G(\xi)$ noch mit einem Parameter m belastet: $G(\xi) = G_m(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(m)} \xi^n$ und diese Funktion so wählt, dass gerade der m-te Koeffizient $g_m^{(m)}$ gleich 1 ist.

§ 2.

Um auf die Funktionen $G_m(\xi)$ zu kommen, brauchen wir bloss eine bekannte Konstruktion[8]) etwas abzuändern. Wir setzen

$$h_m(\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{\alpha^2}{l_\nu^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(m)} \alpha^k. \tag{9}$$

---

[8]) Vgl. etwa *F. Carlson* und *E. Landau*, Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabry'schen Lückensatzes [Göttinger Nachrichten 1921, S. 184 - 188].

Hierbei soll $\{l_\nu\}$ die unendliche Folge in (l) bezeichnen, ν soll sämtliche ganze Zahlen durchlaufen, wenn $m \neq l_\nu$, hingegen ν_0 auslassen für $m = l_{\nu_0}$. Wir sehen, dass die $h_m(\alpha)$ mit den von *Carlson* und *Landau* a. a. O. [8]) benützten ganzen Funktionen φ_n identisch sind, wenn für die dortige Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ die Folge $l_1, l_2, l_3, \ldots$ und ev. noch die Zahl m gewählt wird, wenn ferner $\lambda_n = m$. Wir brauchen also nicht ausführlich auseinanderzusetzen, dass (ebenso wie bei *Carlson—Landau*) für jedes $\delta > o$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$(10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=o}^{\infty} |d_k^{(m)}|\,|\alpha|^k < A(\delta)\, e^{\delta|\alpha|}, \\ \displaystyle |d_k^{(m)}| < B(\delta)\,\frac{\delta^k}{k!}, \\ \displaystyle \frac{1}{|h_m(m)|} < C(\delta)\, e^{\delta m}. \end{cases}$$

Hierbei sind A, B, C von α, m und k frei.

Wir setzen nun

$$G_m(\xi) = \frac{1}{h_m(m)} \sum_{n=o}^{\infty} h_m(n)\, \xi^n = \frac{1}{h_m(m)} \sum_{k=o}^{\infty} d_k^{(m)} \sum_{n=o}^{\infty} n^k \xi^n.$$

Nach einem Satz der Funktionentheorie[9]) hat diese Funktion die einzige singuläre Stelle $\xi = 1$. Wir brauchen hier etwas mehr, nämlich die Abschätzung

$$(11)\qquad |G_m(\xi)| < D(\delta)\, e^{\delta m},$$

wenn $|1 - \xi|$ oberhalb einer festen positiven Zahl ω bleibt und $D(\delta)$ von n und ξ unabhängig ist (nur von δ und ω abhängt). Hierbei muss δ genügend klein gewählt werden: $\delta < \delta_0$, wo δ_0 von ω abhängt.

Wir zeigen (11) auf die folgende geläufige Weise. Wir wählen δ_0 so klein, dass $\delta_0\, t < 1$, wobei

$$t = t(\omega) = \text{Max}\left(\frac{1}{|1-\xi|},\ \left|\frac{\xi}{1-\xi}\right|\right).$$

---

[9]) Vgl. *G. Faber*, Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen [Math. Ann. Bd. 57 (1903), S. 369—388] S. 377.

Es ist nach einer bekannten Formel

$$\sum_{n=o}^{\infty} n^k \xi^n = \frac{f_k(\xi)}{(1-\xi)^{k+1}},$$

wo $f_k(\xi)$ ein Polynom k-ten Grades mit lauter nichtnegativen Koeffizienten bezeichnet und $f_k(1) = k!$ ist. D. h.

$$\left|\frac{f_k(\xi)}{(1-\xi)^{k+1}}\right| \leqq \frac{k!}{|1-\xi|^{k+1}} \operatorname{Max}(1, |\xi|^k) \leqq \frac{k!}{\omega} t^k,$$

woraus mit Rücksicht auf (10) die verlangte Abschätzung (11) folgt.

Wir konstruieren nun wie in § 1 die Polynome $Q_n^{(m)}(x)$, definiert durch die Entwicklungen

$$G_m\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right) = \frac{1}{h_m(m)} \sum_{n=o}^{\infty} h_m(n) \left(\frac{x}{\varphi(z)}\right)^n = \sum_{n=o}^{\infty} Q_n^{(m)}(x) z^n$$

und setzen $Q_n^*(x) = Q_n^{(n)}(x)$. Dieses Polynom n-ten Grades hat offenbar den höchsten Koeffizienten 1, enthält keine Glieder der Folge (l), die niedrigeren als n-ten Grades sind, es gilt ferner gleichmässig im Innern und auf C die Abschätzung

$$|Q_n^*(x)| < \frac{D(\delta) e^{\delta n}}{r^n}.$$

Hierbei ist $r < \frac{1}{\gamma}$ und die oben genannte Zahl ω hängt von r ab: $\omega = \omega_r$. D. h.

$$\limsup_{n=\infty} \left| Q_n^*(x) \right|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{e^{\delta}}{r}.$$

Hier kann r beliebig nahe an $\frac{1}{\gamma}$ und δ (bei festgewählten r) beliebig klein gewählt werden. D. h.

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{\mu_n^{(l)}} \leqq \limsup_{n=\infty} \left| Q_n^*(x) \right|^{\frac{1}{n}} \leqq \gamma.$$

Mit Rücksicht auf die schon oben erwähnte Beziehung $\mu_n^{(l)} \geqq \gamma^n$ folgt hieraus der behauptete Satz.

§ 3.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt ein sehr natürlicher Zugang zu dem sogenannten *Fabry*'schen Lückensatz, der neuerdings von vielen Autoren untersucht worden ist. Dieser lautet wie folgt:

Hat die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{l_\nu}$, *wobei* $l_1 < l_2 < \ldots$ *positive ganzzahlige Exponenten mit*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{l_\nu}{\nu} = \infty$$

sind, den Konvergenzradius 1, *so kann sie nicht über den Einheitskreis* $|z| < 1$ *hinaus fortgesetzt werden.*

Sonst könnte man nämlich über die Zahlen φ_1, φ_2, R, η so verfügen, dass $0 \leqq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$, $R > 1$, $\eta > 0$ ist, dass ferner $f(z)$ regulär sei in dem von der folgenden Kurve Γ begrenzten Bereiche: Γ besteht aus den Stücken:

$$\Gamma \begin{cases} \text{der Kreisbogen} \quad |z| = 1-\eta, & \varphi_2 \leqq \operatorname{Arg} z \leqq \varphi_1 + 2\pi, \\ \text{die Strecken} \quad 1-\eta \leqq |z| \leqq R, & \operatorname{Arg} z = \varphi_1 \text{ bzw. } \varphi_2, \\ \text{der Kreisbogen} \quad |z| = R, & \varphi_1 \leqq \operatorname{Arg} z \leqq \varphi_2. \end{cases}$$

Wird hier (bei festen φ_1, φ_2, R) η genügend klein gewählt, so besitzt der Bereich, der hieraus durch die Transformation $z' = \frac{1}{z}$ entsteht, eine Abbildungskonstante, die kleiner ist als eine feste Zahl $\gamma < 1$, welche von η unabhängig ist. Man hat nun

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{l_\nu+1}} dz.$$

Wegen des speziellen Charakters der Potenzreihe $f(z)$ kann ich offenbar setzen:

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z} Q\left(\frac{1}{z}\right) dz,$$

wobei $Q\left(\frac{1}{z}\right) = Q(z')$ ein *beliebiges* Polynom l_ν-ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1 bezeichnet, in welchem sämtliche Glieder mit den Exponenten $l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}$ fehlen. Nach dem oben Bewiesenen lässt sich aber ein solches Polynom Q derart angeben, dass wenn z auf Γ liegt, gleichmässig

$$\left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| < (\gamma + \varepsilon)^{l_\nu},$$

ist, wobei ε positiv und beliebig klein ist. Hieraus folgt

$$|a_\nu| < K(\gamma + \varepsilon)^{l_\nu},$$

mit einem von ν freien K. D. h.

$$\limsup_{\nu=\infty} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \leqq \gamma + \varepsilon$$

oder da ε beliebig klein ist,

$$\limsup_{\nu=\infty} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \leqq \gamma < 1,$$

was der Tatsache widerspricht, dass $f(z)$ den Konvergenzradius 1 hat.

Es ist zu bemerken, dass diese Beweisanordnung kaum eine Vereinfachung gegenüber den bekannten bedeutet, hauptsächlich weil die ganzen Funktionen, welche das Haupthilfsmittel aller dieser Beweise bilden, auch hier, u. zw. schon bei der in § 2 behandelten Fragestellung herangezogen worden sind.

Die hier dargelegte Beziehung zu dem *Fabry*'schen Lückensatz zeigt auch ungefähr den Weg an, auf dem man zu beweisen versuchen wird, dass die Bedingung (3) auch hinreicht, um das Bestehen der Grenzwertgleichung (2') behaupten zu können. In der Tat ist es klar, dass wenn $\{l_\nu\}$ irgend eine unendliche Folge ist, für die *mindestens eine* über ihren Konvergenzkreis hinaus fortsetzbare Potenzreihe der Form $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{l_\nu}$ existiert, so kann bei dieser Folge die Gleichung (2') unmöglich gelten, wenigstens nicht für sämtliche geschlossene, doppelpunktlose und stetige Kurven C. (Sonst würde nämlich auf die obige Weise die Nichtfortsetzbarkeit der Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{l'_\nu}$ folgen.) Es ist mir jedoch nicht gelungen, auf diesem Wege die naheliegende Vermutung, dass die Bedingung (3) auch *notwendig* ist, damit (2') bestehe, zu bestätigen.

Berlin, November 1922.

Über die Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers durch Henselsche Grenzwerte.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

1. Es sei

$$(1) \qquad f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0, \; f(\omega) = 0,$$

eine ganzzahlige, im gewöhnlichen Sinne irreduzible Gleichung. Für die Untersuchung des Körpers $K(\omega)$ ist es sehr vorteilhaft den Körper durch *Henselsche* Grenzwerte zu erweitern. Es besteht nämlich ein Zusammenhang zwischen den Primidealfaktoren einer Primzahl p und den p-adischen irreduziblen Faktoren von (1). Um diesen Zusammenhang unvermittelt und einfach zu begründen, habe ich in der Arbeit[1]: „Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper“ zum Körper $K(\omega)$ zunächst die gewöhnlichen Konjugierten adjungiert und dann den so gewonnenen Körper G durch *Henselsche* Grenzwerte, d. h. durch die Fundamentalreihen in bezug auf ein Primideal $\mathfrak{P}$ von p im Körper G erweitert.[2])

2. Für manche Zwecke, z. B. für die Untersuchung des Körpers $K(\omega)$ in bezug auf $\mathfrak{p}$ — ein Primideal von $K(\omega)$ — genügt es den Körper durch die auf $\mathfrak{p}$ bezüglichen Fundamentalreihen zu erweitern.[3]) In dieser Arbeit werde ich ohne weitere Adjunktion beweisen, dass der Körper $K(\mathfrak{p})$ identisch mit dem Körper $K(\omega, p)$ ist, welcher aus $K(\omega)$ durch die Adjunktion der rationalen p-adischen Zahlen entsteht und die Zahl ω eine p-adische

---

[1]) Math. Zeitschrift. Bd. 14 (1922), S. 244—249.

[2]) Vgl. das Ende des Punktes 5. dieser Arbeit.

[3]) Vgl. die in meiner Arbeit [1]) unter [13]) und [14]) zitierten Abhandlungen.

irreduzible Gleichung vom Grade $m = fg$ erfüllt, wenn im Körper $K(\omega)$

(1*) $$p = \mathfrak{p}^g \cdot \mathfrak{q}, \ (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1$$

ausfällt und $\mathfrak{p}$ den Grad f besitzt.

3. Die Grössen des Körpers $K(\omega, p)$ sind im Körper $K(\mathfrak{p})$ enthalten, nur die Umkehrung muss bewiesen werden; es genügt ganze Grössen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ zu betrachten. Ist π eine ganze Zahl des Körpers $K(\omega)$, die genau $\mathfrak{p}$ enthält, dann ist jede ganze Grösse α des Körpers in der Gestalt:

(2) $$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \pi + \alpha_2 \pi^2 + \ldots (\mathfrak{p})$$

darstellbar, wo die Zahlen α_r ganze Zahlen des Körpers $K(\omega)$ sind. Man hat also

(2*) $$\alpha_r = c_{1r}\,\omega_1 + c_{2r}\,\omega_2 + \ldots + c_{nr}\,\omega_n,$$

die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ bilden ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen von $K(\omega)$ und die Zahlen c_{jr} sind rational-ganz.[4]) Der Beweis wird sehr einfach, wenn wir noch die erlaubte Annahme[5]) machen, dass die Zahl π durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist. In diesem Falle wird

$$\pi^{gl+k} = \pi^k p^l \beta_l, \ \beta_l = \alpha_{1l}\,\omega_1 + \ldots + \alpha_{nl}\,\omega_n$$
$$\alpha_{jl} \text{ rat. ganz,}$$

folglich ist

(3) $$\alpha = \sum_{k=0}^{g-1} \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\,\omega_i\,\pi^k,$$

wo die Zahlen p_{ik} ganze rationale p-adische Zahlen sind.

Da die Zahlen ω_i, π rationale Funktionen von ω bilden, ist unsere Behauptung bewiesen.

4. Wir werden beweisen, dass die ganzen Grössen der Körper $K(\mathfrak{p})$ und $K(\omega, p)$ identisch sind. Eine Grösse ist als Grösse von $K(\mathfrak{p})$ ganz, wenn sie eine Darstellung (2) zulässt, also aequivalent einer nicht negativen Potenz von π ist; dieselbe ist als Grösse von $K(\omega, p)$ ganz, wenn sie einer Gleichung mit

---

[4]) Es lässt sich nämlich ohne die Konjugierten zu benützen, beweisen, dass in $K(\omega)$ ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen existiert. Dies folgt aus den allgemeineren Betrachtungen, die wir im Punkte 6. geben.

[5]) Es ist leicht ersichtlich, wie der Beweis ohne diese Annahme zu führen ist.

ganzen rationalen p-adischen Koeffizienten genügt, deren höchster Koeffizient gleich Eins ausfällt. Ist nun α als Grösse von $K(\mathfrak{p})$ ganz, so hat man nach dem Vorigen

$$(3^*) \qquad \alpha\, \omega_j\, \pi^h = \sum_{k=0}^{g-1} \sum_{l=1}^{n} p_{lk}^{(j,h)}\, \omega_l\, \pi^k, \; (j = 1, 2, \ldots, n; \; h = 0, 1, \ldots; g-1)$$

wo die Zahlen $p_{lk}^{(j,h)}$ ganze rationale p-adische Zahlen sind, nach der Theorie des linearen Gleichungssystems ist also α auch als Grösse von $K(\omega, p)$ ganz. Wir werden beweisen, dass eine Grösse von der Gestalt

$$(4) \qquad \pi^a\, (\alpha_0 + \alpha_1\, \pi + \ldots)\, (\mathfrak{p})$$

$$a < 0,\ \alpha_l \text{ ganz (als Gr. von } K(\omega)),\ \alpha_0 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

als Grösse von $K(\omega, p)$ keine ganze Grösse sein kann. Im entgegengesetzten Falle wären die Grössen $\dfrac{1}{\alpha_0 + \alpha_1\, \pi + \ldots}$, π^a, $\dfrac{1}{\pi}$ ganze Zahlen von $K(\omega, p)$. Dies ist aber nicht richtig. Die Zahl π erfüllt eine irreduzible Gleichung

$$(5) \qquad \pi^\nu + a_1\, \pi^{\nu-1} + \ldots + a_{\nu-1}\, \pi + a_\nu = 0\ (p),$$

deren Koeffizienten ganze rationale p-adische Zahlen sind. Aus (5) folgt, dass a_ν teilbar durch p ist[6]), also genügt $\dfrac{1}{\pi}$ der irreduziblen Gleichung

$$(5^*) \qquad \left(\frac{1}{\pi}\right)^\nu + \frac{a_{\nu-1}}{a_\nu} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\nu-1} + \ldots + \frac{1}{a_\nu} = 0\ (p).$$

da die Zahl $\dfrac{1}{a_\nu}$ keine ganze Zahl ist, wird auch $\dfrac{1}{\pi}$ keine ganze Grösse von $K(\omega, p)$ bilden.

5. Die Zahl ω genügt einem irreduziblen Faktor der Gleichung (1). Es sei

$$(6) \qquad g(x) = x^m + p_1\, x^{m-1} + \ldots + p_m = 0\ (p)$$

die irreduzible p-adische Gleichung, deren Wurzel ω ist.[7]) Wir werden die Anzahl der (mod. p) inkongruenten ganzen Zahlen

---

[6]) Es ist nämlich $\dfrac{a_\nu^g}{p}$ aequivalent einer nicht negativen Potenz von π.

[7]) Die Gleichung hängt von $\mathfrak{p}$ ab, es handelt sich um die Entwickelung von ω nach $\mathfrak{p}$. Vgl. meine Arbeit [1]).

des Körpers $K(\mathfrak{p}) = K(\omega, p)$ nach Herrn *Hensel* auf zweierlei Weise bestimmen. Man kann zunächst ohne weitere Adjunktion beweisen[8], dass ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen existiert, welche aus m Grössen besteht, also ist die fragliche Anzahl gleich p^m. Andererseits folgt aus (1*) und der additiven Darstellung (2), dass die Anzahl der (mod. p) inkongruenten ganzen Grössen gleich p^{fg} ausfällt; es ist also $m = fg$, was zu beweisen war.

Ist die Gleichung (1) eine Galoissche Gleichung, so besitzt sie in den Körpern $K(\omega)$ und $K(\mathfrak{p}) = K(\omega, p)$ dieselben n verschiedenen Wurzeln. Da sämtliche Wurzeln rationale Funktionen von einander sind, wird (1) im Körper der rationalen p-adischen Zahlen gleich dem Produkte von einander verschiedenen irreduziblen Faktoren des Grades fg ausfallen.[9])

6. Nun werden wir nachträglich ohne weitere Adjunktion beweisen, dass die ganzen Zahlen des Körpers $K(\omega)$, bzw. des Körpers $K(\mathfrak{p}) = K(\omega, p)$ Fundamentalsysteme aufweisen.[10]) Es sind einige einfache Betrachtungen über sog. endliche Erweiterungen erforderlich.[11]) Wenn $\mathfrak{K}$ eine endliche Erweiterung des Körpers K bildet und die Grössen

$$(7) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

in bezug auf K linear unabhängige Grössen sind, deren Anzahl eine maximale ist, dann lässt sich jede Grösse Ω des Körpers $\mathfrak{K}$ eindeutig in der Form

$$(7^*) \qquad \Omega = r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \ldots, + r_n \alpha_n$$

---

[8]) Dieser Satz wird auch aus den Betrachtungen des Punktes 6. folgen. Vgl. die Fussnote [3]).

[9]) Da sämtliche Wurzeln in Betracht kommen, ist es unnötig in diesem Falle die Konjugierten zu vermeiden. Es ist zu betonen, dass man auf diese Weise den tieferen Zusammenhang zwischen einer Zahl und ihren „Bildern", sowie andere Tatsachen nicht bekommt. Die Untersuchungen sind auf Relativkörper ausdehnbar.

[10]) Ich glaube die für uns wichtigen Beweise genau angeben zu müssen, zumal dieselben bei *Hensel* nicht ausgeführt sind. Vgl. Eine neue Theorie der alg. Zahlen. Math. Zeitschrift. Bd. 2 (1918), S. 433—452, bzw. S. 442—443. Neue Begründung etc. Math. Zeitschrift. Bd. 5 (1919), S. 118—131, bzw. S. 127.

[11]) Die Terminologie ist die *Steinitz*'sche. Vgl. seine grosse Abhandlung: Algebraische Theorie der Körper. Journal für Math. Bd. 137 (1910), S. 167—309, § 7.

darstellen, wo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ Grössen von K sind. Aus den Relationen

$$\text{(8)} \qquad \Omega\,\alpha_i = r_{i1}\,\alpha_1 + r_{i2}\,\alpha_2 + \ldots + r_{in}\,\alpha_n, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (r_{ik} \text{ Gr. von } K)$$

erhält man bekannterweise die charakteristische Gleichung für Ω, ihre Norm und Spur durh die Formeln :

$$\text{(8*)} \quad F(\Omega) = |r_{ik} - \Omega| = 0,\ N(\Omega) = |r_{ik}|,\ S(\Omega) = r_{11} + r_{22} + \ldots + r_{nn} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und es ist

$$F(x) = N(\Omega - x).$$

Diese Begriffe sind von der Wahl der Basis (7) unabhängig.

Sind $r, r_1, r_2, \ldots r_n$ Grössen von K und Ω_1, Ω_2 Grössen von $\mathfrak{K}$, dann wird:

$$\text{(9)} \quad \left.\begin{aligned} N(r) = r^n,\ S(r) = nr,\ S(r_1\,\Omega_1 + r_2\,\Omega_2) = r_1\,S(\Omega_1) + r_2\,S(\Omega_2) \\ N(\Omega_1\,\Omega_2) = N(\Omega_1)\,N(\Omega_2)^{12)}\,. \end{aligned}\right\}$$

und wenn

$$\triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = |S(\alpha_i\,\alpha_k)| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt wird, hat man:

$$\text{(10)} \quad \left.\begin{aligned} \triangle(\alpha_1, \alpha_2 + r\,\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = \triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ \triangle(r_1\,\alpha_1 + \ldots + r_n\,\alpha_n, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = r_1^2\,\triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}\right\}$$

Es besteht der folgende Satz. Die Grössen des Körpers $\mathfrak{K}$

$$\text{(11)} \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

sind dann und nur dann in bezug auf K linear unabhängig, wenn

$$\text{(11*)} \qquad \triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq 0$$

ausfällt.

Sind zunächst die Grössen (11) linear unabhängig und $\Omega' \neq 0$, so hat man :

---

[12]) Aus der Formel ist ersichtlich, dass aus $N(\Omega) = 0$, die Relation $\Omega = 0$ folgt. Man kann noch beweisen, dass die charakteristische Gleichung immer die Potenz einer irreduziblen Gleichung ist.

$$\Omega = r_1 \alpha_1 \quad r_2 \alpha_2 + \ldots + r_n \alpha_n, \ \frac{1}{\Omega} = r_1' \alpha_1 + r_2' \alpha_2 + \ldots + r_n' \alpha_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i' S(\Omega \alpha_i) = S(1) \neq 0,$$

folglich besitzt das Gleichungssystem

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i S(\alpha_i \alpha_k) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

nur die Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, woraus $|S(\alpha_i \alpha_k)| \neq 0$ folgt.

Es seien jetzt $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ in bezug auf K linear unabhängige Grössen, dann hat man:

$$\alpha_i \alpha_k = (v_{i1} \beta_1 + v_{i2} \beta_2 + \ldots, + v_{in} \beta_n)(v_{k1} \beta_1 + v_{k2} \beta_2 + \ldots + v_{kn} \beta_n),$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

woraus die Relation

$$(12^*) \qquad |S(\alpha_i \alpha_k)| = |S(\beta_i \beta_k)| \, |v_{ik}|^2$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt, wo die Grössen v_{ik} zum Körper K gehören. Ist nun $|S(\alpha_i \alpha_k)| \neq 0$, so wird $|v_{ik}| \neq 0$, die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sind in bezug auf K linear unabhängig.

Wir bekommen ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen der Körper $K(\omega)$, bzw. $K(\mathfrak{p}) = K(\omega, p)$, wenn die Grössen der betreffenden Basen ganze Grössen sind und die zugehörigen Determinanten $\triangle$ einen minimalen absoluten Wert, bzw. eine minimale Ordnung in bezug auf p aufweisen.[13])

---

[13]) Im Falle eines gewöhnlichen algebraischen Zahlkörpers n-ten Grades, lassen sich ausser der Existenz des Fundamentalsystems, noch weitere Sätze ohne Anwendung der Konjugierten ableiten. Ist Ω eine ganze Zahl und bilden $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen, so folgt aus

$$\Omega \, \omega_i = c_{i1} \omega_1 + c_{i2} \omega_2 + \ldots + c_{in} \omega_n, \ c_{ik} \text{ rat. ganz}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

$N(\Omega) \cdot \omega_i = \Omega \gamma_i$ wo γ_i eine ganze Zahl ist. Da Eins eine ganze Zahl bildet, bekommt man, dass die Norm einer ganzen Zahl durch dieselbe teilbar ist. Man kann auch Normen der Formen und Ideale in der angedeuteten Weise in Betracht ziehen und durch Anwendung der bekannten Literatur ist eine Reihe von Sätzen ohne Benützung der Konjugierten ableitbar. Solche Sätze sind: der Hauptsatz der Idealtheorie, die Endlichkeit der Klassenanzahl, der Zusammenhang zwischen der Grundgleichung (mod. p) mit den Primfaktoren von p. (Natürlich ist nicht ein jeder der bekannten Beweise zu diesem Zwecke geeignet.)

Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie.

Von Alexander Ostrowski in Hamburg.

(Aus einem Briefe an Herrn F. Riesz.)

Ihrem Wunsche gern entsprechend, lege ich im Folgenden den Gedankengang der an die *Jensen*sche Formel anknüpfenden Untersuchung dar, die ich in meinem Vortrag auf der diesjährigen Naturforscherversammlung in Leipzig, sowie in unseren anschliessenden Unterhaltungen gestreift habe. Es handelt sich bei dieser Untersuchung erstens darum, die zentrale Stellung, die der *Jensen*schen Integralformel als analytischem Hilfsmittel bei Untersuchung des Verhaltens analytischer Funktionen am Rande des Existenzbereiches zukommt, klarzulegen; zweitens darum, die Voraussetzungen, unter denen die betreffenden Ergebnisse bisher hergeleitet wurden, in dem durch den Gebrauch der *Jensen*schen Formel nahegelegten Sinne zu erweitern: Fast alle diese Ergebnisse gelten bereits unter der Annahme, dass für die betrachtete Funktion $f(z)$ die Integrale $\int_0^{2\pi} |\log |f(\varrho e^{i\vartheta})|| \, d\vartheta$ für $\varrho < 1$ gleichmässig beschränkt sind, einiges gilt sogar, wenn die Integrale $\int_0^{2\pi} \log |f(\varrho e^{i\vartheta})| \, d\vartheta$ beschränkt bleiben. (Diese erweiterte Fassung der Voraussetzungen habe ich Ihnen bereits in Leipzig für einige dieser Ergebnisse mitgeteilt.)

Es sei $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und $f(o) \neq o$ (diese letzte Annahme ist für die im folgenden herzuleitenden Ergebnisse durchaus unwesentlich, vereinfacht aber die Formeln). Es gebe eine Zahl G, für die die Integrale

$$I_\rho(f) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \log |f(\varrho e^{i\vartheta})| \, d\vartheta < G \qquad o < \varrho < 1$$

sind. Aus der *Jensen*schen Formel $\quad (o < \varrho < 1)$

$$(1) \quad \log |f(o)| + \log \prod_{|z_\kappa| < \rho} \left|\frac{\varrho}{|z_\kappa|}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \log |f(\varrho e^{i\vartheta})| \, d\vartheta = I_\rho,$$

wo z_κ alle Nullstellen von f für $|z| < \varrho$ durchlaufen, folgt

$$\frac{1}{\prod\limits_{|z_\kappa|<\rho} |z_\kappa|} \leqq \frac{e^{I_\rho}}{\varrho^n\,|f(o)|},$$

unter n die Anzahl der Nullstellen von f für $|z| < \varrho$ verstanden. Und dies gilt bekanntlich auch dann, wenn das Produkt linker Hand über n *beliebige* Nullstellen von $f(z)$ erstreckt wird. Daraus folgt aber leicht die Konvergenz des Produktes $\Pi\,|z_\kappa|$ für eine Funktion $f \not\equiv o$ mit beschränkten I_ρ.[1]) Für beschränkte f hat dies Hr. *Blaschke* bewiesen, für den Fall beschränkter $\int_o^{2\pi} |f(\varrho e^{i\vartheta})|^\delta d\vartheta$ $(\delta > o)$ haben Sie den Beweis geführt.[2])

Nunmehr bilde ich das nach Hrn. *Blaschke* für $|z| \leqq \varrho < 1$ gleichmässig konvergierende Produkt

$$B(z) = \prod_1^\infty \left\{ |z_\kappa| \frac{1 - \dfrac{z}{z_\kappa}}{1 - z\,\overline{z_\kappa}} \right\}, \qquad B(o) = \Pi(|z_\kappa|).$$

Wie Sie bewiesen haben, haben die Randwerte von $B(z)$ fast überall den absoluten Betrag 1. Man kann den Beweis übrigens auch mit Hilfe der *Jensen*schen Formel führen, wobei er in einem Punkte einfacher wird.

Bildet man nun den Quotienten

$$Q(z) = \frac{f(z)}{B(z)},$$

so ist $Q(z)$ offenbar für $|z| < 1$ regulär und nullstellenfrei, und die Punktmengen auf der Peripherie des Einheitskreises, in denen $f(z)$ und $Q(z)$ Randwerte besitzen, stimmen bis auf Nullmengen überein. Auch die Randwerte selbst stimmen, bis auf eine Null-

---

[1]) Daraus folgt insbesondere, dass wenn die z_κ nach den wachsenden absoluten Beträgen geordnet sind, $1 - |z_\kappa| = o\left(\frac{1}{\kappa}\right)$ ist. Will man auch im Falle nicht beschränkter I_ρ Aufschluss über die Stärke der Konvergenz der $|z_\kappa|$ gegen 1 erhalten, so wird man $\dfrac{e^{I_\rho}}{\rho^n}$ bei gegebenem n zu Minimum zu machen suchen, nach demselben Verfahren, das Hr. E. *Lindelöf* in seinen Untersuchungen über ganze transzendente Funktionen angewandt hat.

[2]) In Ihren Briefen an Hrn. G. *Szegő*. Ich bin heute in der Lage, eine mir dank der Liebenswürdigkeit von Hrn. *Szegő* zur Verfügung gestellte deutsche Übersetzung dieser Briefe zu benutzen, die am 17. XI. 22 in meine Hände gelangte.

menge, in ihren absoluten Beträgen überein. Ferner erfüllt auch $Q(z)$ die Bedingung der Beschränktheit der $I_\rho(Q)$. Man sieht auch leicht ein, dass wenn für $f(z)$ die Integrale $I_\rho(f) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} |\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|| \, d\vartheta$ für $o < \varrho < 1$ gleichmässig beschränkt sind, dasselbe auch für $Q(z)$ der Fall ist. (Man kann auch zeigen, dass wenn $f(z)$ beschränkt ist, dasselbe auch für $Q(z)$ gilt).[3])

Nunmehr mache ich die weitere Voraussetzung, dass für $f(z)$ (und daher auch für $Q(z)$) die Integrale

$$\bar{I}_\rho(f) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} |\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|| \, d\vartheta$$

gleichmässig für $o < \varrho < 1$ beschränkt sind. — Diese Voraussetzung ist, wie man leicht sieht, mit der Annahme vollständig äquivalent, dass die Integrale

$$I_\rho^*(f) = \frac{1}{2\pi}\int \log|f(\varrho e^{i\vartheta})| \, d\vartheta$$

über diejenigen ϑ erstreckt, für die der Integrand positiv ist, für $o < \varrho < 1$ gleichmässig beschränkt sind. — Setzen wir nun $R(z) = \Re \log Q(z)$, so folgt aus unserer Annahme die gleichmässige Beschränktheit der Integrale $\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} |R(\varrho e^{i\vartheta})| \, d\vartheta$ für $o < \varrho < 1$. Es sei etwa E ihre gemeinsame Schranke. Ist

$$R(\varrho e^{i\vartheta}) = a_o + (a_1 \cos\vartheta + b_1 \sin\vartheta)\varrho + \ldots + (a_n \cos n\vartheta + \\ + b_n \sin n\vartheta)\varrho^n + \ldots,$$

so sieht man leicht, dass alle a_i, b_i absolut $\leqq E$ sind. Da aber daraus folgt, dass

$$\varphi(\vartheta) = (a_1 \sin\vartheta - b_1 \cos\vartheta) + \ldots + \frac{1}{n}(a_n \sin n\vartheta - b_n \cos n\vartheta) + \ldots$$

fast überall konvergiert, ergibt sich nach dem *Abel*schen Stetigkeitssatz, dass

$$\Theta(\varrho, \vartheta) = (a_1 \sin\vartheta - b_1 \cos\vartheta)\varrho + \ldots + \frac{1}{n}(a_n \sin n\vartheta - b_n \cos n\vartheta)\varrho^n + \ldots$$

für $\varrho \to 1$ fast überall einen Grenzwert besitzt.

---

[3]) Damit ist die von Ihnen für den Fall beschränkter $\int |f(\rho e^{i\vartheta})|^\delta \, d\vartheta$ hergeleitete Zerlegung auf den Fall beschränkter I_ρ verallgemeinert — eine Frage, die ich in einer Diskussionsbemerkung zu Ihrem Vortrag in Leipzig berührt habe.

Nun ist aber $\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = R(\varrho e^{i\vartheta})$. Daher ist Θ auf jedem Kreise $|z| = \varrho < 1$ von beschränkter Schwankung ($\leq E$) und folglich auch beschränkt ($\leq E$), da Θ als eine Potentialfunktion auf jedem Kreise $|z| = \varrho < 1$ nach dem *Gauss*schen Mittelwertsatz Nullstellen hat. Daraus folgt, dass auch $\varphi(\vartheta)$ zunächst in den Konvergenzpunkten und dann nach geeigneter Festsetzung der Werte in den Divergenzpunkten im ganzen Intervall $0 \ldots 2\pi$ beschränkt und von beschränkter Schwankung ist. Daher existiert $\varphi'(\vartheta)$ nach *Lebesgue* fast überall und ist integrabel, und $\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = R(\varrho e^{i\vartheta})$ konvergiert nach *Fatou* für $\varrho \to 1$ gegen $\varphi'(\vartheta)$ überall, wo $\varphi'(\vartheta)$ existiert. Damit haben wir bewiesen, *dass* $|Q(z)|$, daher auch $|f(z)|$ *fast in jedem Punkt der Kreisperipherie bei radialer Annäherung einen Grenzwert* $\psi(\vartheta)$ *besitzt, und dass* $\log \psi(\vartheta)$ *integrabel ist.* Und zwar ist dies gezeigt unter der Annahme der Beschränktheit der Integrale $I_\varrho^* = \int \log |f(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$ nur über ϑ erstreckt, denen positiver Integrand entspricht. Hierin ist, wie Sie sehen, der *Szegő*sche Satz mitenthalten, und ebenso Ihre Verschärfungen dieses Satzes.

Endlich folgt hieraus noch, dass auch die Randwerte von $f(z)$ selbst fast überall existieren, wenn man das obige Resultat auf $f(z) + \frac{1}{2}$, $f(z) + \frac{i}{2}$ und $f(z)$ anwendet und von der Identität Gebrauch macht:

$$\left|f(z) + \frac{1}{2}\right|^2 + i\left|f(z) + \frac{i}{2}\right|^2 - (1+i)\,|f(z)|^2 - \frac{1+i}{4} = f(z).$$

Es ist noch von Interesse, auf die Bedeutung der Bedingung der Beschränktheit der Mittelwerte $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |R(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$ $0 < \varrho < 1$ einzugehen, unter der wir die Potentialfunktion $R(\varrho e^{i\vartheta})$ untersucht haben. *Diese Bedingung ist* nämlich, wie man zeigen kann, *notwendig und hinreichend dafür, dass sich das Potential R mittelst des Poissonschen Integrals darstellen lässt,* wenn man das *Poisson*sche Integral insofern verallgemeinert, als man es als *Stieltjes*sches Integral schreibt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-\varrho^2)\, d\varphi(\alpha)}{1 + 2\varrho\cos(\vartheta - \alpha) + \varrho^2},$$

wo $\varphi(\alpha)$ eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung ist. Dass hierin das *Poisson*sche Integral im von *Fatou* betrachteten Umfang enthalten ist, ist leicht einzusehen. Übrigens deutet auch schon die *Fatou*sche Formulierung der Bedingungen für die Existenz des Randwertes auf die Zweckmässigkeit dieser Verallgemeinerung hin, die ja auch natürlich nicht neu ist, sie tritt ja z. B. in Ihren und Herrn *Herglotz'* Untersuchungen gelegentlich auf und wird systematisch in *Plemelj*'s schönen „Potentialtheoretischen Untersuchungen" benutzt.

—

Ich kehre nun wieder zur *Jensen*schen Formel zurück und übe auf z die lineare Substitution aus

$$z = \frac{\varrho(\alpha - Z)}{\varrho^2 - Z\bar{\alpha}}, \quad \alpha = re^{i\varphi}, \quad r < \varrho$$

durch die der Punkt $z = \alpha$ in den Nullpunkt übergeführt wird. So erhalten wir, wenn wir noch den nicht negativen auf die Nullstellen bezüglichen Term weglassen, die Ungleichung

$$(2) \quad \log|f(re^{i\varphi})| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})| \frac{(\varrho^2 - r^2)\, d\vartheta}{r^2 + 2r\varrho\cos(\vartheta - \varphi) + \varrho^2},$$

die sich natürlich für nullstellenfreie $f(z)$ auf die *Poisson*sche Formel für $\log|f(z)|$ reduziert.[4]) Aus der obigen Formel folgt sofort die folgende Ungleichung

$$(3) \quad \log|f(re^{i\varphi})| \leq \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\varrho + r}{\varrho - r}\int_{M+} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta + \right.$$
$$\left. + \frac{\varrho - r}{\varrho + r}\int_{M-} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta\right\},$$

wo M^+ die Menge der ϑ-Werte aus dem Intervall $0 \ldots 2\pi$ ist, für die $|f(\varrho e^{i\vartheta})| > 1$, M^- die komplementäre Menge ist.

Es sei nun $f_n(z)$ eine Folge von für $|z| < 1$ regulären Funktionen, für die die Integrale $I_\varrho^*(f_n) = \int_0^{2\pi} \log|f_n(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$ über diejenigen ϑ erstreckt, für die der entsprechende Integrand > 0 ist, sämtlich unterhalb einer festen Schranke liegen.

---

[4]) Man kann auch die Ungleichung (2) direkt mit Hilfe des *Poisson*schen Integrals beweisen, durch einen ähnlichen Kunstgriff, wie der von Herrn *Landau* zur Herleitung der *Jensen*schen Formel aus dem *Cauchy*schen Satze angewandte. Übrigens gilt die Formel (2) auch, wenn $f(re^{i\varphi}) = 0$ ist, wenn man dann $\log|f(re^{i\varphi})| = -\infty$ setzt.

Besitzen die $f_n(z)$ auf einer Punktmenge M der Peripherie des Einheitskreises von positivem Lebesgueschem Mass Randwerte, deren Folge mit ins Unendliche wachsendem n konvergiert, so konvergiert die Funktionenfolge $f_n(z)$ für jedes $|z| < 1$ und in jedem Kreise $|z| \leqq r < 1$ gleichmässig. Ich habe diesen Satz für den Fall gleichmässig beschränkter $f_n(z)$ vor einigen Monaten in einem Brief an Herrn *Bieberbach* aufgestellt.[5]) Auch sein Beweis beruht auf der *Jensen*schen Formel in der oben transformierten Gestalt.

Ich will zunächst die Formulierung des obigen Konvergenzsatzes etwas abändern. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass mit $f_m(z)$ und $f_{m_1}(z)$ auch $f_m(z) - f_{m_1}(z)$ die Eigenschaft hat, dass $I_\varrho^*(f_m - f_{m_1})$ gleichmässig in ϱ, m, m_1 beschränkt ist, und daher $f_m(z) - f_{m_1}(z)$ fast überall Randwerte besitzt. Wir wollen nun annehmen, dass jedem Paar ganzer positiver m, p eine messbare Punktmenge $M_{m,p}$ auf der Peripherie des Einheitskreises zugeordnet ist, derart, dass die Masse der $M_{m,p}$ sämtlich grösser als eine feste positive Zahl μ sind, und dass die Maxima $N_{m,p}$ der absoluten Beträge der $f_{m+p}(z) - f_m(z)$ auf der entsprechenden Punktmenge $M_{m,p}$ in den Punkten, in denen die Randwerte von $f_{m+p}(z) - f_m(z)$ existieren, mit ins Unendliche wachsendem m gleichmässig in p gegen 0 konvergieren. Die hierin in einem gewissen Masse enthaltene Annahme der *Gleichmässigkeit* der Konvergenz der Randwerte ist nur eine scheinbare Abschwächung gegenüber der ersten Formulierung, wie aus dem *Egoroff*schen Satze sofort folgt.

Zum Beweise bezeichne ich mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\kappa \ldots$ eine Folge positiver wachsender gegen 1 konvergierender Zahlen. Dann kann man nach dem *Egoroff*schen Satze in jeder Menge $M_{m,p}$ eine messbare Teilmenge $M'_{m,p}$ vom Masse μ finden, derart, dass wenn r über $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\kappa, \ldots$ gegen 1 strebt, $|f_{m+p}(re^{i\vartheta}) - f_m(re^{i\vartheta})|$ *gleichmässig* in ϑ aus $M'_{m,p}$ gegen einen Randwert strebt, der natürlich nicht grösser als $N_{m,p}$ ist. Dann folgt aus (3) für $r < \varrho_\kappa$

$$\log|f_{m+p}(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})| \leqq \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\varrho_\kappa + r}{\varrho_\kappa - r} I_\varrho^*(f_{m+p} - f_m) + \right.$$
$$\left. + \frac{\varrho_\kappa - r}{\varrho_\kappa + r}\mu \log(N_{m,p} + \varepsilon)\right\},$$

wenn in den Punkten des Kreises $|z| = \varrho_\kappa$, die der Punktmenge

[5]) Jahresbericht d. D. M. V., Bd. 31, (1922), pp. 82—85.

$M'_{m,p}$ entsprechen, $|f_{m+p}(z) - f_m(z) < N_{m,p} + \varepsilon = 1$ ist, was für hinreichend grosse $\varkappa$, m zutrifft. Bedenkt man nun, dass man für $\varrho_\varkappa \to 1$ ε gegen o konvergieren lassen kann, so folgt schliesslich, wenn mit $\overline{M}$ die obere Grenze aller $I^*_\rho(f_{m+p} - f_m)$ bezeichnet wird:

$$\log|f_{m+p}(r\,e^{i\varphi}) - f_m(r\,e^{i\varphi})| \leqq \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1+r}{1-r}\overline{M} + \frac{1-r}{1+r}\mu \log N_{m,p}\right\},$$

woraus die Behauptung des ausgesprochenen Satzes sofort folgt[6]) Durch die vorhergehenden Betrachtungen habe ich z. B. zugleich bewiesen: 1. Ist für eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion $I^*_\rho(f) < 1$ und auf einer Punktmenge der Peripherie des Einheitskreises vom Masse μ $|f| \leqq M < 1$, so gibt es zwei nur von $r < 1$ und μ abhängige positive Konstanten c, γ derart, dass

$$|f(r\,e^{i\varphi})| < c\,M^\gamma$$

ist. 2. Ist für $|z| < 1$ $f(z)$ regulär und $|f(z)| \leqq 1$, ist ferner auf einer Punktmenge der Peripherie des Einheitskreises vom Masse μ $|f| \leqq M < 1$, so gibt es ein nur von $r < 1$ und μ abhängiges $\gamma > o$ derart, dass für $o \leqq \varphi \leqq 2\pi$

$$|f(r\,e^{i\varphi})| < M^\gamma \tag{4}$$

ist. Daraus folgt aber weiter durch eine Reihe geläufiger Schlüsse: *Ist $f(z)$ in einem von einer Jordanschen Kurve begrenzten Gebiete G regulär und absolut $\leqq M$, ist ferner $|f(z)| < M_1$ auf einem Jordanschen Kurvenbogen C, der in G oder auf dem Rande von G verläuft, so ist in jedem ganz im Inneren von G liegenden abgeschlossenen Bereich B*

$$|f(z)| \leqq M^\gamma M_1^{\gamma_1}, \qquad \gamma + \gamma_1 = 1,$$

wo γ, γ_1 zwei positive Konstanten sind, die nur von G, B, C abhängen. Dabei kann man C auch durch eine auf einer rektifizierbaren Kurve liegende Punktmenge von positivem Mass ersetzen.

[6]) In diesem Satze ist der folgende enthalten: *Ist $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär, und sind $I^*_\rho(f)$ für $0 < \rho < 1$ beschränkt, ist ferner der Randwert von f auf einer Punktmenge von $|z| = 1$ von positivem Mass gleich 0, so verschwindet f identisch.* Man braucht nur auf die Funktionenfolge $f(z)$, 0, $f(z)$, 0, ... den soeben bewiesenen Satz anzuwenden. Unter der (engeren) Annahme der Beschränktheit der $\int_0^{2\pi} |f e^{i\vartheta})|^\delta d\vartheta$ haben Sie ja diesen Satz in Ihren oben erwähnten Briefen an Hrn *Szegő* bewiesen.

Dieses Ergebniss lässt, wie ich in meinem Leipziger Vortrag angedeutet habe, eine Reihe wichtiger Anwendungen zu.

Endlich bemerke ich noch, dass eine feinere Diskussion, die an die *Fatou*schen Sätze über das *Poisson*sche Integral und die obige Ungleichung (2) anknüpft, auch über das Aufhören der Gleichmässigkeit der Konvergenz im obigen Konvergenzsatze, sowie über die Änderung der Konstante γ in der Abschätzung (4) bei der Annäherung an die Peripherie des Einheitskreises Aufschluss gibt. Ich werde hierauf, sowie auf einiges andere in einer ausführlichen Veröffentlichung zurückkommen, in der ich auch die Beweise, die ich Ihnen nur flüchtig skizziert habe, mit allen notwendigen Details darstellen werde.

Hamburg, Math. Sem. der Universität, Dezember 1922.

Sur les suites de fonctions analytiques.

Par M. FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

1. Dans une conférence faite au congrès des mathématiciens scandinaves, tenu à Stockholm en 1916, M. Marcel *Riesz* et l'auteur ont démontré le théorème suivant:

I. *Pour une fonction $f(z)$ holomorphe et bornée à l'intérieur d'un cercle, les valeur limites aux points de la circonférence du cercle ne peuvent s'annuler que sur un ensemble de mesure nulle, sauf dans le cas évident où $f(z) \equiv 0$.*[1])

Par valeurs limites d'une fonction aux points d'une circonférence de cercle nous entendons — ici et dans la suite — les valeurs limites radiales c'est-à dire les limites formées suivant les rayons aboutissant aux points considérés. Il convient d'observer que, pour les fonctions en question ce n'est pas essentiel de se borner aux valeurs limites radiales, puisque d'aprés un théorème de M. *Fatou* on obtient la même limite — au moins presque partout — sur tout chemin faisant un angle $< \frac{\pi}{2}$ avec le rayon.[2])

M. *Ostrowski* vient de généraliser le théorème I en énonçant — sans démonstration — le théorème que voici:

II. *Étant donnée une suite indéfinie de fonctions $f_n(z)$, holo-*

---

[1]) F. u. M. *Riesz*, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Compte rendu du quatrième congrès des mathématiciens scandinaves (1916), p. 27—44, cf. p. 32.

[2]) P. *Fatou*, Séries trigonométriques et series de Taylor, Acta math. *30* (1906), p. 335—400, cf. p. 348 et 357. E. *Lindelöf*, Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme, Acta Soc. Scient. Fennicae *46* (1915), n° 4, cf. p. 10, a démontré que, pour $f(z)$ bornée, le fait indiqué suit déjà si l'on suppose seulement qu'il existe un chemin quelconque (ligne de Jordan simple), aboutissant au point considéré et sur lequel $f(z)$ tend vers une valeur limite. Voir aussi P. *Montel*, Sur la représentation conforme, Journal des math. pures et appl. 7e série, *3* (1917), p. 1—54; cf. p. 19.

morphes et bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un cercle, supposons que la suite des valeurs limites respectives soit convergente sur un ensemble de mesure positive; alors la suite des $f_n(z)$ *est convergente dans tout l'intérieur du cercle.*[3])

On montre aisément que le théorème II est compris dans le suivant qui d'ailleurs montre d'une façon plus nette l'analogie avec le théorème I:

III. *Étant donnée une suite indéfinie de fonctions* $f_n(z)$, *holomorphes et bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un cercle, supposons que les valeurs limites respectives tendent vers zéro avec* $\frac{1}{n}$ *sur un ensemble de mesure positive; alors les* $f_n(z)$ *tendent vers zéro dans tout l'intérieur du cercle.*

En effet, pour obtenir II, il suffit d'appliquer le théorème III aux suites de la forme $\{ f_m(z) - f_n(z) \}$, m et n allant à l'infini indépendemment. Il convient d'observer que, en réalité, les théorèmes II et III sont équivalents c'est-à-dire que l'on peut aussi déduire III de II; pour cela, on n'a qu'à appliquer le théorème II à la suite $f_1(z)$, 0, $f_2(z)$, 0, ...

Au premier abord, la relation entre les théorèmes I et III semble d'être évidente. En effet, depuis les recherches bien connues de MM. *Vitali* et *Montel* sur les familles normales de fonctions on s'est servi bien de fois, pour des généralisations de cette sorte, de l'ordre d'idées suivant: Supposons que les $f_n(z)$, appartenant à une famille normale, par exemple holomorphes et bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un certain domaine D, tendent vers zéro aux points d'un ensemble E sans tendre vers zéro partout en D; alors il y a en D une valeur $z = z_0$ telle que la suite $f_n(z)$ ou une suite partielle convenablement choisie tende, pour $z = z_0$, vers une limite $\neq 0$, et par un second choix on parvient à une suite partielle convergeant, dans tout l'intérieur de D, vers une fonction holomorphe $f^*(z)$ s'annulant aux points de l'ensemble E, mais ne s'annulant pas pour $z = z_0$. Mais cela implique contradiction dans tous les cas où l'on a choisi l'ensemble E de sorte que

---

[3]) Auszug aus einem Briefe von A. *Ostrowski* an L. Bieberbach, Jahresbericht d. deutschen Math.-Vg., *31* (1922), p. 82—85; cf. p. 85.

Dans une conférence faite à la réunion annuelle des mathématiciens allemands, tenue à Leipzig en septembre 1922, M. Ostrowski a donné quelques indications relatives à la démonstration.

l'évanouissement de $f^*(z)$ sur E entraîne l'évanouissement dans tout le domaine D, p. ex. dans le cas où l'ensemble E admet un point limite intérieur à D.

Or si l'on voulait appliquer cette recette au cas considéré, comme dans ce cas E appartient à la frontière du domaine D, il faudrait tout d'abord se demander s'il est permis d'intervertir l'ordre des deux passages à la limite $r \rightarrow 1$ et $n \rightarrow \infty$ Il n'en est rien, comme le montre l'exemple: $f_n(z) = (1-z)^{\frac{1}{n}}, f^*(z) = 1, f_n(1) = 0$, $f^*(1) = 1$.

On voit par ces remarques que le théorème de M. *Ostrowski* n'est pas une conséquence de notre théorème I et du théorème de choix de M. *Vitali* ou au moins qu'il n'en est pas une conséquence évidente. Il ne sera donc pas sans intérêt de voir comment le raisonnement dont nous nous sommes servis dans la conférence indiquée, pour obtenir le théorème I, conduit aussi, presque sans modification, au théorème III.

2. Supposons, ce qui ne restraint pas la généralité, qu'il s'agisse du cercle-unité et soit $m > 0$ la mesure de l'ensemble E, appartenant à la circonférence du cercle et sur lequel les valeurs limites des fonctions $f_n(z)$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Désignons par A une quantité positive dont nous disposerons plus tard. Soit $u(x, y)$ la fonction harmonique qui correspond, par l'intégrale de *Poisson,* aux valeurs suivantes: $\frac{A}{m}$ pour l'ensemble E, $\frac{A}{m-2\pi}$ pour l'ensemble complémentaire E^*. D'après M. *Fatou,* cette fonction aura les valeurs données pour valeurs limites radiales, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle.[4]) De plus, comme l'intégrale des valeurs données s'annule, on aura $u(0, 0) = 0$. En introduisant encore la fonction harmonique conjuguée $v(x, y)$ dans laquelle on dispose de la constante additive arbitraire de sorte que $v(0, 0) = 0$, la fonction

$$g(z) = g(x + iy) = e^{u(x, y) + iv(x, y)}$$

sera holomorphe et bornée à l'intérieur du cercle-unité, elle sera égale à 1 pour $z = 0$ et ses valeurs limites radiales seront égales en module, presque partout, à $e^{\frac{A}{m}}$ ou à $e^{\frac{A}{m-2\pi}}$ suivant que le

[4]) l. c., p 366/7.

point en question appartient à l'ensemble E ou à son complément E^*.

Envisageons maintenant les fonctions $f_n(z)\, g(z)$; ces fonctions sont holomorphes et bornées dans leur ensemble tout comme les $f_n(z)$; on y peut donc appliquer les formules de *Cauchy* non seulement en intégrant le long d'une circonférence $|z| = r < 1$, mais aussi pour $|z| = 1$, ce qui vient immédiatement du théorème de M. *Lebesgue* concernant l'intégration terme à terme des suites bornées. En particulier on a

$$f_n(0) = f_n(0)\, g(0) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{f_n(z)\, g(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \left\{ \int\limits_{E} + \int\limits_{E^*} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} (I_1 + I_2).$$

Nous allons montrer que $f_n(0) \to 0$ c'est-à-dire que, en choisissant arbitrairement une quantité positive ε, on aura $|f_n(0)| < \varepsilon$ pour n suffisamment grand. Dans ce but, commençons par évaluer l'intégrale I_2. On a

$$|I_2| \leqq e^{\frac{A}{m-2\pi}} \int\limits_{E^*} |f_n(z)|\, |dz| \leqq e^{\frac{A}{m-2\pi}} \int\limits_{|z|=1} |f_n(z)|\, |dz|$$

et comme les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble, il vient

$$|I_2| \leqq C e^{\frac{A}{m-2\pi}}$$

où la constante C ne dépend ni de n ni du paramètre A. Par suite, nous pouvons disposer de A de sorte que le second membre de la dernière inégalité devienne $< \pi\varepsilon$; alors on aura

$$\frac{1}{2\pi} |I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et cela pour tous les n.

Pour évaluer I_1, observons que, A une fois choisi, les fonctions sous le signe d'intégration restent bornées dans leur ensemble et que, sur E, elles tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Par conséquent, en vertu du théorème de M. *Lebesgue*, $I_1 \to 0$. C'est-à-dire que, pour n suffisamment grand, on aura

$$\frac{1}{2\pi} |I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et en somme, on aura $|f_n(0)| < \varepsilon$, c. qu. f. d.

La démonstration du fait que $f_n(z) \to 0$ dans tout l'intérieur du cercle-unité s'achève maintenant comme il suit. Il suffit de prouver que l'on a aussi $f'_n(0) \to 0$, $f''_n(0) \to 0$ et, en général, $f_n^{(k)}(0) \to 0$ pour tous les k; la relation $f_n(z) \to 0$ s'ensuit par un théorème classique. En raisonnant par récurrence, il suffit donc de montrer que les relations $f_n^{(k)}(0) \to 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$ entraînent $f_n^{(\nu)}(0) \to 0$. Pour cela, considérons les polynomes

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} z^k;$$

d'après l'hypothèse faite, les coefficients de ces polynomes et alors les polynomes eux-mêmes tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la convergence étant uniforme dans tout domaine fini; en particulier, les polynomes $p_n(z)$ restent, pour $|z| \leqq 1$, inférieures à une constante K. Les fonctions $f_n(z)$ étant inférieures, selon l'hypothése, à une constante L, la différence $f_n(z) - p_n(z)$ sera, pour $|z| < 1$, inférieure à $K + L$ et comme $z = 0$ en est un zéro d'ordre $\geqq \nu$, la fonction

$$\varphi_n(z) = \frac{f_n(z) - p_n(z)}{z^\nu}$$

sera aussi holomorphe et inférieure à $K + L$ pour $|z| < 1$. C'est-à-dire que les fonctions $\varphi_n(z)$ remplissent les mêmes hypothéses que les $f_n(z)$; il s'ensuit que

$$f_n^{(\nu)}(0) = \nu!\, \varphi_n(0) \to 0$$

et la démonstration est achevée.

Au lieu de passer aux dérivées, on aurait pu aussi démontrer la relation $f_n(z_0) \to 0$ pour toute valeur z_0 intérieure au cercle-unité en partant de la remarque que l'on peut effectuer une transformation linéaire de ce cercle en lui-même et cela de sorte que le point z_0 passe au point $z = 0$; alors aux ensembles de mesure positive, il y corresponde des ensembles de même nature et réciproquement; enfin les valeurs limites radiales seront les mêmes en des points correspondants. Grâce à cette remarque, le cas général se réduit au cas $z = 0$.

3. *Le théorème I reste vrai quand on y remplace l'hypothèse que la fonction $f(z)$ soit bornée, par l'hypothèse plus générale que les valeurs moyennes*

$$\mu_\delta(r) = \mu_\delta(f; r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\vartheta}) \right|^\delta d\vartheta$$

restent, pour une certaine valeur positive de l'exposant δ, et pour $r < 1$, inférieures à une borne qui ne dépend pas de r. L'intérêt que l'on apporte à ces valeurs moyennes est motivé en premier lieu par un théorème de M. *Hardy*;[5]) ce théorème dit entre autres que les valeurs moyennes $\mu_\delta(r)$ vont en croissant avec r et que, par conséquent, pour $\delta > 0$ donné, il ne peuvent se présenter que deux cas: ou bien les $\mu_\delta(r)$ vont à l'infini pour $r \to 1$ ou bien elles restent bornées et tendent vers une limite $\mu^*_\delta = \mu^*_\delta(f)$; alors cette limite est une borne supérieure des quantités $\mu_\delta(r)$.

Comme m'a fait observer M. *Ostrowski*,[6]) *le théorème II* (et alors évidemment le théorème III) *peuvent être généralisés d'une façon analogue*, savoir en remplaçant l'hypothèse que les fonctions $f_n(z)$ soient bornées dans leur ensemble par l'autre qu'il en soit ainsi pour les valeurs moyennes $\mu_\delta(f_n; r)$ qui correspondent à un certain exposant δ, c'est-à-dire que les quantités $\mu^*_\delta(f_n)$ forment une suite bornée.

Dans le cas où $\delta \geqq 1$, ces généralisations suivent par l'ordre d'idées que nous venons d'exposer, en y faisant seulement très peu de modifications d'ailleurs évidentes. Je n'y insiste pas et je passe à un ordre d'idées différent, *embrassant aussi les cas où $\delta < 1$* et qui met en évidence la source commune de tous ces théorèmes.

4. C'est M. *Szegő* qui a précisé le théorème I d'une façon surprenante, en démontrant que *le logarithme du module des valeurs limites est toujours une fonction sommable*, sauf naturellement dans le cas évident où $f(z) \equiv 0$.[7]) Comme ce logarithme devient infini négatif en tout point où $f(z)$ s'annule, le théorème I n'est qu'un corollaire évident de la découverte de M. *Szegő*. Or ce fait tient non seulement pour les fonctions bornées, mais aussi pour les fonctions à valeurs moyennes bornées dont nous venons de

---

[5]) G. H. *Hardy*, The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function, Proceedings of the London Math. Soc., Ser. 2., *14* (1915), p. 269—277.

[6]) Il s'agit d'une communication verbale et c'est seulement en corrigeant les épreuves que j'ai reçu la note précédente que M. *Ostrowski* voulait bien mettre à ma disposition.

[7]) G. *Szegő* et F. *Riesz*, Analytikus függvény kerületi értékeiről, Math. és term. értesítő *38* (1920), p. 113—127; G. *Szegő*, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Math. Annalen *84* (1921), p. 232—244.

parler, comme l'a démontré M. *Szegö* lui-même pour $\delta \geqq 2$ et comme je l'ai démontré dans les autres cas en me servant d'une formule bien connue de M. *Jensen*. Presque en même temps M. *Fatou* est parvenu indépendemment à l'idée de partir de cette formule pour en déduire une démonstration très rapide et élémentaire du théorème I et de sa généralisation pour le cas d'un exposant quelconque $\delta > 0$.[8])

Au lieu de déduire l'inégalité dont nous aurons besoin de la formule de *Jensen* nous allons l'établir directement ce qui ne coutera pas plus de peine.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe pour $|z| \leqq r$ et supposons pour un instant que $f(z) \mp 0$. Alors $\log |f(z)|$ est une fonction harmonique de x, y $(x + iy = z,\ x^2 + y^2 \leqq r^2)$ et par la formule de *Poisson*, on aura pour $z_0 = r_0 e^{i\vartheta_0}$ $(r_0 < r)$:

$$2\pi \log |f(z_0)| = \int_0^{2\pi} P \log |f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta$$

où l'on a posé

$$P = \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0)}.$$

Décomposons l'intervalle $(0, 2\pi)$ en deux ensembles de sorte que ϑ appartienne à l'un ou l'autre suivant que $\log |f(re^{i\vartheta})|$ est positif ou ne l'est pas, c'est-à-dire suivant que $|f| > 1$ ou $|f| \leqq 1$; il vient

$$2\pi \log |f(z_0)| = \int_{|f|>1} P \log |f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta + \int_{|f|\leqq 1} P \log |f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta;$$

comme d'autre part on a

$$\int_{|f|\leqq 1} = \int_{|f|>1} - \int_0^{2\pi} P \Big| \log |f(re^{i\vartheta})| \Big|\, d\vartheta,$$

on obtient

$$2\pi \log |f(z_0)| = 2 \int_{|f|>1} P \log |f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta - \int_0^{2\pi} P \Big| \log |f(re^{i\vartheta})| \Big|\, d\vartheta$$

---

[8]) P. *Fatou*, Sur l'évanouissement d'une branche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière, Bulletin des sciences math., mars 1921

et enfin, en remplaçant P dans ces deux intégrales respectivement par ses valeurs maximée et minimée, il vient

(1) $$2\pi \log |f(z_0)| \leqq$$
$$2\frac{r+r_0}{r-r_0}\int\limits_{|f|>1} \log|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta - \frac{r-r_0}{r+r_0}\int\limits_0^{2\pi} \left|\log|f(re^{i\vartheta})|\right| d\vartheta.$$

Or cette inégalité tient aussi lorsqu'on renonce à l'hypothèse que $f(z) \neq 0$ ce que l'on montre par un raisonnement bien connu, savoir en décomposant $f(z)$ en deux facteurs

$$f(z) = g(z)\,h(z),$$

où $h(z)$ désigne une fonction rationnelle admettant pour $|z| < r$ les mêmes racines que $f(z)$ et égale en module à l'unité pour $|z| = r$ et par conséquent, $g(z) \neq 0$ pour $|z| < r$ et $|g(z)| = |f(z)|$ pour $|z| = r$. En appliquant l'inégalité (1) à la fonction $g(z)$ et en observant que $|h(z_0)| < 1$ et que, par conséquent, $|f(z_0)| < |g(z_0)|$, l'inégalité (1) tiendra a fortiori pour la fonction $f(z)$.

C'est cette inégalité qui est la source commune de tous les résultats indiqués.

5. En effet, supposons que $f(z)$ soit holomorphe pour $|z| < 1$ et faisons l'hypothèse que la première des intégrales qui figurent au second membre de (1), reste $\leqq A$ pour tous les $r < 1$. Cela posé, soit E un ensemble mesurable situé sur la circonférence du cercle-unité ou ce qui revient au même, un ensemble de valeurs ϑ entre 0 et 2π, telles que les valeurs limites radiales, pour $r \to 1$, de $f(re^{i\vartheta})$ ou au moins celles de $|f(re^{i\vartheta})|$ existent. Convenons, pour plus de simplicité, de désigner ces dernières par $|f(e^{i\vartheta})|$. Notre inégalité donne a fortiori

$$\int\limits_E \left|\log|f(re^{i\vartheta})|\right| d\vartheta \leqq 2A\left(\frac{r+r_0}{r-r_0}\right)^2 - 2\pi\frac{r+r_0}{r-r_0}\log|f(z_0)|;$$

en choisissant z_0 de sorte que $f(z_0) \neq 0$, il s'ensuit, grâce à un théorème bien connu de M. *Fatou*, que la fonction $\log|f(e^{i\vartheta})|$ est sommable sur l'ensemble E et que l'on a

$$(2) \int\limits_E \left| \log |f(e^{i\vartheta})| \right| d\vartheta \leqq 2A\left(\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\right)^2 - 2\pi \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \log |f(z_0)|$$

Pour appliquer cette inégalité aux cas particuliers dont il s'agit, il suffit de remarquer que l'on a $\log x < x$ ou plus généralement $\log x = \frac{1}{\delta} \log x^\delta \leqq \frac{1}{\delta} x^\delta$ $(\delta > 0)$ et que, par conséquent, pour $f(z)$ bornée, savoir $|f(z)| \leqq M$, on peut prendre $A = 2\pi M$; plus généralement, on pourra poser $A = \frac{2\pi}{\delta} \mu^*_\delta$ où μ^*_δ est la borne supérieure, pour $r < 1$ (et en même temps la limite, pour $r \to 1$) des valeurs moyennes $\mu_\delta(f; r)$. C'est-à-dire que si la fonction $f(z)$ reste bornée ou plus généralement si, pour un certain $\delta > 0$, la valeur moyenne $\mu_\delta(f; r)$ reste bornée, le logarithme de $|f(e^{i\vartheta})|$ est une fonction sommable de ϑ sur chaque ensemble mesurable pour lequel ces valeurs limites existent. D'ailleurs, pour certains cas particuliers, par exemple pour le cas où $f(z)$ est bornée ou aussi dans tous les cas où $\delta \geqq 1$, l'existence de ces valeurs limites presque partout, c'est-à-dire sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle, est un fait connu et l'on peut aussi le démontrer dans les autres cas considérés; mais nous n'en avons pas besoin si nous nous contentons d'énoncer le théorème de M. *Szegő* sous la forme suivante: *pour les fonctions considérées, log* $|f(e^{i\vartheta})|$ *est sommable sur tout l'ensemble où les valeurs limites* $|f(e^{i\vartheta})|$ *existent.* En particulier, il s'ensuit que *ces valeurs limites ne peuvent s'annuler que sur un ensemble de mesure nulle.*

6. Pour démontrer le théorème de M. *Ostrowski* ou ce qui revient au même, le théorème III, même sous l'hypothèse plus générale dont nous avons parlé, il suffit d'observer que si les $|f_n(e^{i\vartheta})|$, supposées existantes, tendent vers zéro sur un ensemble E de mesure positive, l'intégrale de $\log |f(e^{i\vartheta})|$ croîtra indéfiniment et que, par conséquent, la valeur du second membre de l'inégalité (2) ira aussi à l'infini. Donc si l'on suppose que la quantité A reste la même pour tous les n ou qu'elle reste inférieure à une certaine borne finie, il s'ensuit que $\log |f_n(z_0)| \to -\infty$, c'est-à-dire que $f_n(z) \to 0$ et cela uniformément pour $|z| \leqq r < 1$.

Or en tenant compte des expressions que nous venons de donner pour A, on voit que ce sera toujours le cas lorsque les fonctions $f_n(z)$ ou plus généralement lorsque, pour un certain $\delta < 0$, les valeurs moyennes $\mu_\delta(f_n; r)$ restent bornées dans leur ensemble. Ainsi le théorème III se trouve démontré non seulement pour les suites bornées, mais aussi pour celles pour lesquelles les quantités $\mu_\delta^*(f_n)$ restent bornées.

Szeged, novembre 1922.

Über Zwischenwerte bei komplexen Polynomen.

Von M. FEKETE in Budapest.

1. Eine fundamentale — sozusagen Namen ergebende — Eigenschaft der für $a \leqq x \leqq b$ *stetigen* reellen Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x besteht im Folgenden: Ist $f(a) \neq f(b)$ und liegt χ zwischen $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, so nimmt $f(x)$ den Wert γ mindestens in einem Punkte c zwischen a und b an.

Lässt man die Voraussetzung der *Realität* der Veränderlichen und ihrer Funktion fallen (und deutet dabei die Ausdrucksweise: „z liegt zwischen u und v“ für komplexe Werte von u, v, z naturgemäss dahin, dass z ein Punkt der Strecke von u nach v ist), so verliert im Allgemeinen die Funktion — wenn auch stetig — die obige Eigenschaft. Das zeigt schon das Beispiel der Funktion e^x, für welche $e^{i\pi} = -1$, $e^0 = 1$ und doch nirgends $e^x = 0$ ist.

Wie in manchen anderen Fällen,[1] sind es wiederum die Polynome, welche die Eigenschaften der allgemeinen reellen stetigen Funktion einer reellen Veränderlichen — mutatis mutandis — im Komplexen erben. Es gilt nämlich der

Satz I. *Ein Polynom*

(1) $$P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n, \ n \geqq 2$$

nehme für $x = a$ und $x = b$ die nicht gleichen Werte α und β an.

---

[1] Vgl. die Sätze von *Gauss, Jensen, Grace-Heawood* über die Wurzeln der Derivierten eines Polynoms (*Jensen,* Recherches sur la théorie des équations, [Acta Math. 36 (1912), S. 181—195], S. 190; *Grace,* The zeros of a polynomial [Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 11 (1900—1902), S. 352—357]; *Heawood,* Geometrical relations between the roots of $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, [Quart. Journ. of Math. 38 (1907), S. 84—107]). S. auch [2]. Vgl. auch *Fekete,* Beweis eines Satzes von Jentzsch [Jahresber. der Deutschen Math. Verein. 31 (1922), S. 42—48]; *Fekete,* 5. Aufgabe [Ebenda. S. 65—66].

Dann nimmt es jeden zwischen α und β liegenden Wert γ innerhalb oder am Rande des Kreises an, der um den Punkt $x = \frac{a+b}{2}$ *mit dem Radius* $\frac{|a-b|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$ *geschlagen wird.*

2. Der Zweck der vorliegenden Note ist der Beweis dieses Satzes. Wir gewinnen ihn durch die Anwendung eines von *Grace* entdeckten, von *Egerváry* wiedergefundenen, durch ihn und *Szegő* neubewiesenen, wichtigen Tatsache.[2]) Diese kann in einer *Szegő*-schen Formulierung folgendermassen ausgesprochen werden:

Satz II. *Es seien $l_0, l_1, \ldots, l_n$ gegebene Konstanten, die nicht sämtlich verschwinden und*

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + \ldots + q_n x^n = 0, \quad q_n \neq 0$$

sei eine algebraische Gleichung, deren Koeffizienten der Bedingung

$$l_n q_0 + l_{n-1} q_1 + \ldots + l_0 q_n = 0$$

genügen. Dann liegt wenigstens eine der Wurzeln von $Q(x) = 0$ in jedem Kreisbereiche, der sämtliche Wurzeln der Gleichung

$$l_0 - \binom{n}{1} l_1 z + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} l_n z^n = 0$$

enthält.

Hierbei ist unter einem Kreisbereiche entweder der abgeschlossene Innenbereich, oder der abgeschlossene Aussenbereich eines Kreises oder aber eine abgeschlossene Halbebene verstanden.

3. Mit Hilfe dieses Satzes kann der gewünschte Beweis etwa so geführt werden:

Ist $P(a) = \alpha$, $P(b) = \beta$, so lässt jedes zwischen α und β liegendes γ die folgende Darstellung zu:

(2) $$\gamma = \lambda P(a) + \mu P(b),$$

wobei

(3) $$0 < \lambda < 1, \quad 0 < \mu < 1, \quad \lambda + \mu = 1$$

ist. Nach (1) und (3) ist (2) gleichbedeutend mit

$$(\lambda + \mu)(p_0 - \gamma) + (\lambda a + \mu b) p_1 + \ldots + (\lambda a^n + \mu b^n) p_n = 0,$$

[2]) *Grace* a. a. O. [1]); *Szegő,* Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen [Math. Zeitschrift, 13 (1922), S. 28—55]; *Egerváry,* On a maximum-minimum problem and its connexion with the roots of equations [Diese Zeitschrift 1 (1922), S. 39—45]; *Egerváry,* Egy a symmetrikus, multilineáris formára vonatkozó minimum-feladat. [Math. és phys. lapok, 29 (1922), S. 21—43].

also besitzt, nach Satz II, das Polynom $Q(x) = P(x) - \gamma$ wenigstens eine Nullstelle in jedem Kreisbereich, der sämtliche Wurzeln z_ν der Gleichung

$$\lambda a^n + \mu b^n - \binom{n}{1}(\lambda a^{n-1} + \mu b^{n-1}) z + \ldots + (-1)^n (\lambda + \mu) z^n = 0,$$

d. h. der Gleichung

$$\lambda (z-a)^n + \mu (z-b)^n = 0$$

enthält. Nun liegen diese Wurzeln, der Relation

$$\left(\frac{z_\nu - a}{z_\nu - b}\right)^n = -\frac{\mu}{\lambda}$$

zufolge, sämtlich in einem Kreiszweieck, gebildet durch die beiden Kreisbögen, aus deren Punkten die gemeinsame Sehne $\overline{ab}$ unter einem Winkel $= \frac{\pi}{n}$ zu sehen ist,[3]) also sind diese Wurzeln gewiss in dem um den Mittelpunkt der Sehne mit dem Radius $\frac{|a-b|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$ geschlagenen Kreise enthalten. Damit ist Satz I bewiesen.

Zusatz. *Der eben genannte Kreis kann durch keinen kleineren ersetzt werden.*

In der Tat, ist $a \neq b$, sonst beliebig, ferner $n \geqq 2$ und setzt man

$$P(x) = (x-c)^n,\ c = \frac{a+b}{2} \pm i\frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n},$$

so besteht offenbar

$$P(a) + P(b) = (a-c)^n + (b-c)^n = 0,$$

also ist c die (einzige) Wurzel der Gleichung

$$P(x) = \frac{P(a) + P(b)}{2}.\ \text{W. z. b. w.}$$

Budapest, den 20. Dez. 1922.

---

[3]) Vgl. *Fekete*, 6. Aufgabe [Jahresb. d. Deutschen Math. Verein., 31 (1922), S. 66]; *J. Nagy v. Sz.*, A polaris egyenletek gyökeinek helyzetéről [Math. és term.-tud. ért. 39 (1922), S. 442–455].

Bemerkung zu einem Unitätssatze der konformen Abbildung.

Von TIBOR RADÓ in Szeged.

Bekanntlich besteht der folgende Unitätssatz:

Eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Innern des Einheitskreises auf sich selbst, bei welcher der Nullpunkt und die reelle positive Richtung fest bleiben, ist die Identität.

Gilt ein solcher Unitätssatz ganz allgemein für jede, beliebig zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit? Betrachtet man die Abbildung

$$z' = 2z$$

so erkennt man, dass für die Vollebene und für die punktierte Ebene der Unitätssatz jedenfalls ungültig ist. Der folgende Satz besagt nun, dass diese beiden Gebiete die einzigen Ausnahmefälle bilden.

Sieht man von der Vollebene und von der punktierten Ebene ab, so kann man behaupten, dass eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auf sich selbst, bei welcher ein Richtungselement fest bleibt, die Identität ist.

Wenn man die Fundamentalabbildung der vorgelegten Mannigfaltigkeit heranzieht, leuchtet der Satz unmittelbar ein. Wir wollen bei dem allgemeinen Falle deshalb nicht länger verweilen, vielmehr für den speziellen Fall eines gewöhnlichen schlichten Gebietes einen Beweis mitteilen, der wegen seiner Einfachheit einiges Interesse beanspruchen dürfte. Der Beweis gründet sich auf die Betrachtung der Iterierten der Abbildungsfunktion. Herr *F. Riesz* hat mich aufmerksam gemacht, dass eine analoge Schlussweise bei Herrn *Bieberbach* vorkommt[1]), und Herrn *Koebe* verdanke ich die Bemerkung, dass der ursprünglich von mir verwendete Picardsche Satz beim Beweise gar nicht nötig ist. Auf diese Weise ist der folgende elementare Beweis zustande gekommen.

Sei B das fragliche Gebiet, welches den Nullpunkt enthalten möge, den unendlichfernen Punkt nicht, und welches wenigstens einen endlichen Randpunkt hat. Sei ferner $f(z)$ die in B reguläre Funktion, welche B ein-eindeutig und konform auf sich selbst abbildet, und für welche

$$f(0) = 0, f'(0) > 0$$

ist. Es soll bewiesen werden, dass $f(z) \equiv z$.

Um $z = 0$ schlagen wir einen Kreis K mit dem Radius ϱ, der ganz innerhalb B verläuft. In diesem Kreise besitzt $f(z)$ eine Entwicklung

$$f(z) = cz + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots \quad c > 0.$$

wobei a_n den ersten nicht verschwindenden Koeffizienten bedeutet; wir werden eben zeigen, dass $a_n = 0$, $c = 1$ sein muss.

Zunächst zeigen wir, dass $c = 1$ ist. Indem wir nötigenfalls zur inversen Abbildung übergehen, können wir $c \geqq 1$ voraussetzen. Setzen wir

$$f_2(z) = f[f(z)], \ldots f_n(z) = f[f_{n-1}(z)], \ldots$$

so sind $f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ ebenfalls in B reguläre Funktionen, welche B ein-eindeutig konform auf sich selbst abbilden und dabei den Nullpunkt und die positive reelle Richtung fest lassen. Für $f_n(z)$ gilt dabei im Kreise K eine Entwicklung:

$$f_n(z) = c^n z + \ldots$$

Sei K_n das Gebiet, auf welches $f_n(z)$ das Innere von K abbildet, und d_n die Entfernung des Nullpunktes vom Rande von K_n. K_n enthält also einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Ra-

[1]) L. *Bieberbach*, Über einen Satz des Herrn Carathéodory, Göttinger Nachrichten, 1913, S. 552–560. Für den Fall eines beschränkten Gebietes ist unser Satz in dem daselbst S. 556–557. bewiesenen Eindeutigkeitssatze enthalten.

dius d_n im Innern; und da K_n selbst in B enthalten ist, liegt der erwähnte Kreis auch in B. Nach dem Verzerrungssatze ist nun:

$$\varrho \leqq C \frac{d_n}{c^n}$$

wo ϱ der Radius von K und C eine absolute Konstante, bekanntlich gleich vier, ist. Man hat also:

$$d_n \geqq \frac{\varrho}{C} c^n$$

Setzt man $c > 1$ voraus, so folgt $d_n \longrightarrow +\infty$. Von B ist aber angenommen worden, dass es wenigstens einen endlichen Randpunkt hat; d_n kann deswegen höchstens gleich der Entfernung dieses Randpunktes vom Nullpunkte sein. Es muss also $c = 1$ sein. Die Entwicklung von $f(z)$ lautet hiernach:

$$f(z) = z + a_n z^n + \ldots$$

Für die Iterierten erhalten wir:

$$\begin{aligned} f_2(z) &= z + 2\, a_n z^n + \ldots \\ f_4(z) &= z + 4\, a_n z^n + \ldots \\ f_8(z) &= z + 8\, a_n z^n + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Alle diese Funktionen sind im Kreise K regulär und schlicht und im Mittelpunkte normiert. Nach dem Verzerrungssatze muss hiernach der Koeffizient von z^n für alle diese Funktionen unterhalb einer festen Schranke bleiben: $2^m \mid a_n \mid < A$, für alle Werte von m. Deswegen kann a_n nur gleich Null sein. In der Entwicklung von $f(z)$ kommt also eben nur das Glied z vor, d. h. $f(z) \equiv z$ w. z. b. w.

Jena, den 8. November 1922.

Sur la sommation des séries de Fourier.

Par M. MARCEL RIESZ à Stockholm.

1. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π intégrable au sens de M. *Lebesgue*. Concernant la série de *Fourier* d'une telle fonction, on connaît le théorème important de M. *Fejér*[1]) que voici:

La série de Fourier de $f(x)$ est sommable par le procédé des moyennes arithmétiques en tout point de continuité de $f(x)$ avec la somme $f(x)$, ou, plus généralement, avec la somme $S(x)$, en tout point x où la limite $S(x) = \lim\limits_{t \to 0} {}^1/_2 (f(x+t) + f(x-t))$ existe.

On connaît aussi la généralisation importante qu'a donnée de ce théorème M. *Lebesgue*[2]):

En posant $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ et $\Phi(t) = \int\limits_0^t |\varphi(v)|\, dv$, la série de Fourier de $f(x)$ est sommable par le procédé des moyennes arithmétiques avec la somme $f(x)$ en tout point où l'on a $\Phi'(0) = 0$, c'est-à-dire presque partout.

2. On sait que le procédé des moyennes arithmétiques simples (ce sont les moyennes dont il a été question plus haut) fut généralisé de plusieurs manières. Nous nous restreindrons ici à la généralisation donnée pour des indices entiers par *Cesàro* et étendue à des indices non entiers par MM. *Hadamard* et *Knopp*[3]).

---

1) *L. Fejér*, Untersuchungen über *Fourier*sche Reihen, Math. Ann. 58. (1904) p. 51—69.

2) *H. Lebesgue*. Recherches sur la convergence des séries de *Fourier*, Math. Ann. 61 (1905) p. 251—280; Sur les intégrales singulières, Ann. de Toulouse (3) 1 (1909) p. 25—117, particulièrement p. 88—90.

3) Pour tout ce qui concerne ce sujet, *voir L. Bieberbach*, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, Encykl. d. math Wissensch, II. C 4, p. 379—532, partic. p. 477 et suiv.

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ étant une série convergente ou divergente quelconque et k un nombre réel quelconque, posons

$$(1) \qquad (1-x)^{-(k+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} x^n$$

et écrivons l'égalité formelle

$$(2) \qquad (1-x)^{-(k+1)} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n.$$

D'ici on tire

$$(3) \qquad S_n^{(k)} = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k)} u_r.$$

Les valeurs

$$(4) \qquad S_n^{(k)} / C_n^{(k)}$$

sont les moyennes de *Cesàro* d'ordre k de la série Σu_n. Si la limite

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} S_n^{(k)} / C_n^{(k)} = \sigma$$

existe, la série Σu_n est dite sommable par les moyennes d'ordre k avec la somme σ.

On se restreint en général à des valeurs de $k > -1$. Ici, nous ne considérons que les valeurs $k > 0$.

On voit que les moyennes arithmétiques simples, utilisées par M. *Fejér* correspondent à $k = 1$. On sait aussi qu'une série étant sommable par des moyennes d'un certain ordre, il en est de même pour tout ordre supérieur et que les sommes coïncident. Le théorème qui suit, ne donne donc rien de nouveau que pour $0 < k < 1$.

3. En 1909, dans une Note des *Comptes rendus*,[4]) j'ai énoncé sans démonstration une généralisation du théorème de M. *Fejér* qui revient à ceci:

La série de Fourier est sommable par les moyennes d'ordre k avec la somme $S(x)$ en tout point x où la limite

$$S(x) = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$$

existe, et cela pour toute valeur positive de k.

---

[4]) *M. Riesz,* Sur les séries de *Dirichlet* et les séries entières, Comptes rendus, 149 (1909) p. 309—312.

Plus tard mais indépendamment de moi, M. *Chapman*[5]) a retrouvé ce théorème et il en publiait aussi une démonstration.

Plus tard encore M. *Hardy* a généralisé le théorème de M. *Lebesgue* dans la même direction que j'ai généralisé le théorème de M *Fejér*, c'est-à-dire qu'il montrait que *dans les conditions posées par M. Lebesgue la série de Fourier est sommable par des moyennes d'ordre k pour toute valeur positive de k.*[6])

4. Au cours des années, on a de plus en plus reconnu l'importance des théorèmes que nous venons de rappeler, importance dont — pourquoi ne pas le dire — je ne me doutais guère lorsque j'ai énoncé le premier de ces théorèmes. Ainsi on a établi des théorèmes plus ou moins analogues portant sur les séries de *Dirichlet*,[7]) séries de *Laplace*[8]) etc. Mais, c'est un autre point sur lequel je veux insister.

Ces théorèmes sur la sommation à indices non entiers conduisent bien souvent a des théorèmes sur la convergence ordinaire ou sur la sommation à indices entiers. Tel est le cas p. ex. pour les séries de Dirichlet où j'ai démontré[9]) que, *la série* Σa_n *étant sommable par les moyennes d'ordre* k, *la série* $\Sigma a_n n^{-s}$ *sera convergente dès que la partie réelle de* s *est plus grande que* k. Ce théorème est bien utilisable dans la théorie des séries de *Dirichlet.* Mais il y a plus. M. *Hardy* a remarqué que la combinaison de ce théorème avec la généralisation mentionnée qu'il a donné du théorème de M. *Lebesgue*, conduisait immédiatement au théorème très intéressant, dû à M. *Young*, que voici:

$\Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx$ *étant la série de Fourier d'une fonction*

---

[5]) *S. Chapman*, On non-integral orders of summability of series and integrals, Lond. Math. Soc. Proc. (2) 9 (1910—11) p. 369—409.

[6]) *G. H. Hardy*, On the summability of *Fourier*'s series, Lond. Math. Soc. (2) 12 (1913) p. 365—372.

[7]) *Voir G. H. Hardy* and *M. Riesz*, The general theory of *Dirichlet*'s series, Cambridge Tracts of Math. No. 18 (1915).

[8]) *E. Hilb*, Über die *Laplace*sche Reihe, Math. Zschrft, t. 5 (1919) p. 17—25 et t. 8 (1920) p. 79—90. M. *Hilb* travaille, comme M. *Hardy*, avec les moyennes dont j'ai démontré l'équivalence aux moyennes de *Cesàro*. (Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Comptes rendus 152 (1911) p. 1651—1654). Pour la série de *Laplace*, *voir* encore *F. Lukács*, Über die *Laplace*sche Reihe, Math. Zschrft, t. 14 (1922) p. 250—262.

[9]) *G. H. Hardy* and *M. Riesz* l. c. p. 57—59.

intégrable au sens de Lebesgue, la série $\Sigma \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ *convergera presque partout.*[10])

5. Voici maintenant un résultat de MM. *Hardy* et *Littlewood* qui, avec sa démonstration, met le mieux en évidence le rôle de la sommation d'ordre non entier:

La fonction $f(x)$ étant bornée au voisinage d'un certain point x, sa série de Fourier est sommable au point x par les moyennes d'ordre k ou pour toute valeur positive de k ou bien pour aucune valeur de k.[11])

Voici l'idée de la démonstration. On a d'abord le théorème suivant, qui se démontre de la même manière et même un peu plus simplement que notre généralisation du théorème de M. *Fejér*:

Si la fonction $f(x)$ est bornée dans un certain intervalle, les moyennes d'ordre k $(k > 0)$ de sa série de Fourier sont uniformément bornées dans tout intervalle intérieur à cet intervalle.

Il en résulte, en particulier, que ces moyennes sont bornées au point x dont il est question dans le théorème de MM. *Hardy* et *Littlewood*, et cela pour une valeur positive quelconque d'ailleurs arbitrairement petite de k.

D'autre part, on a le théorème suivant que j'ai démontré il y a une dizaine d'années, mais dont la démonstration, que j'ai communiquée à MM. *Hardy* et *Littlewood*, n'a pas encore paru:[12])

Admettons qu'une série est sommable par les moyennes d'un certain ordre et que ses moyennes d'ordre k sont bornées. Alors la série est sommable par des moyennes d'ordre quelconque $> k$.[13])

---

[10]) *G. H. Hardy*, dans le travail cité dans la note[3]) de la p. 2. Toutefois, pour améliorer le résultat de M. *Young* en remplaçant n^ε par $\log n$, M. *Hardy* devait recourir à un examen plus direct des sommes partielles de la série de Fourier.

[11]) MM. *Hardy* et *Littlewood* donnent l'énoncé de ce théorème dans leur travail, *Abel*'s theorem and its converse, Lond. Math. Soc. Proc. (2) t. 18 (1918) p. 205—235, *voir* p. 235. La démonstration se trouve dans la Note, On the *Fourier* series of a bounded function, ibid, t. 17 (1917) p. XIII—XV. (Records of Proceedings at Meetings). Nous ne reproduisons ici qu'une partie du résultat en question. Je viens d'apprendre que, tout récemment, MM. *Hardy* et *Littlewood* ont poussé plus loin leurs recherches concernant ce sujet.

[12]) La démonstration d'un théorème général embrassant ce théorème paraîtra bien prochainement.

[13]) Pour des ordres entiers de sommation, ce théorème fut donné par MM. *Hardy* et *Littlewood* eux-mêmes.

En choisissant maintenant k arbitrairement petit, le théorème de MM. *Hardy* et *Littlewood* résulte par la combinaison des deux derniers théorèmes.

Ce qu'il y a de plus intéressant dans la démonstration précédente, c'est, à mon avis, qu'il fait ressortir le point suivant: même, si l'on ne s'intéresse qu'aux résultats concernant la sommation à indices entiers,[14]) on ne peut se passer de théorèmes sur la sommation à indices non entiers.

6. Dans ces derniers temps, en écrivant avec M. *Hilb* un rapport sur la théorie des séries trigonométriques pour l'édition allemande de l'Encyclopédie, j'ai eu l'occasion de lire ou de relire les différentes démonstrations qu'on a données de la généralisation du théorème de M. *Fejér* que j'ai cité au début. J'ai constaté que toutes ces démonstrations sont moins simples[15]) que celle que je possède et que je me permets d'exposer ici.

Nous donnons d'abord quelques formules concernant les nombres $C_n^{(k)}$. De (1) on tire

$$(6) \qquad C_n^{(k)} = \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}{n!} = \frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k+1)\,n!}$$

d'où il vient

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^{(k)}}{n^k} = \frac{1}{\Gamma(k+1)}.$$

En multipliant la relation (1) par $(1-x)$, on obtient

$$(8) \qquad C_n^{(k)} - C_{n-1}^{(k)} = C_n^{(k-1)}.$$

D'autre part, en écrivant $(1-x)^{-(k+1)} = (1-x)^{-k}(1-x)^{-1}$, il vient par (2)

$$(9) \qquad S_n^{(k)} = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)} S_r^{(0)} = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)} (u_0 + u_1 + \dots + u_r).$$

---

14) Bien entendu, ce n'est pas le cas de MM. *Hardy* et *Littlewood*. Disons encore que MM. *Hardy* et *Littlewood*, en combinant leur résultat avec un résultat de M. *Lebesgue* sur la sommabilité de la série de Fourier par les moyennes d'ordre 2, trouvent un nouveau théorème remarquable, concernant les moyennes les plus intéressantes, les moyennes simples.

15) Outre les démonstrations citées *voir T. H. Gronwall*, On the summability of *Fourier*'s series. Am. Math. Soc. Bull. t. 20 (1913—1914) p. 139—146. Une généralisation intéressante du théorème en question fut encore donnée par M. *F. Nevanlinna*, Über die Summation der *Fourier*schen Reihen und Integrale, Övers. av Finska Vetensk. Soc. Förhandl. t. LXIV. 1920—1921. Avd. A. No. 3, p. 1—14.

Cela posé et la série de *Fourier* de $f(x)$ étant

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x),$$

on a pour les moyennes d'ordre k de cette série

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{C_n^{(k)} a_0}{2} + \sum_{r=1}^{n} C_{n-r}^{(k)} (a_r \cos r x + b_r \sin r x) =$$

$$(10) \qquad = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha) \left\{ \frac{C_n^{(k)}}{2} + \sum_{r=1}^{n} C_{n-r}^{(k)} \cos r(\alpha - x) \right\} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \left\{ \frac{C_n^{(k)}}{2} + \sum_{r=1}^{n} C_{n-r}^{(k)} \cos r t \right\} dt =$$

$$= \frac{C_n^{(k)}}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) H_n(t)\, dt$$

où l'on a posé

$$(11) \qquad C_n^{(k)} H_n(t) = \frac{C_n^{(k)}}{2} + \sum_{r=1}^{n} C_{n-r}^{(k)} \cos r t.$$

La différence essentielle entre le cas traité par M. *Fejér* et celui qui nous occupe c'est que, là, le noyau était positif, tandis qu'ici, le nombre des changements de signe de $H_n(t)$ croît indéfiniment avec n.

On a évidemment

$$(12) \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} H_n(t)\, dt = 1.$$

Désignons alors par S un nombre qu'on va préciser plus loin, mais qui jusqu'à nouvel ordre reste arbitraire. En posant alors

$$(13) \qquad \varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S,$$

les relations (10) et (12) donneront

$$(14) \qquad \frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}} - S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) H_n(t)\, dt.$$

Cela posé, toute la démonstration du théorème en question se basera sur les deux inégalités suivantes.

On a pour $0 \leqq t \leqq \pi, 0 < k < 1$[16])

(15) $$|H_n(t)| < An$$

et

(16) $$|H_n(t)| < Bt^{-(k+1)} n^{-k},$$

A et B étant deux nombres ne dépendant que de k.

L'inégalité (15) résulte immédiatement de la relation (11) et du fait que les nombres $C_n^{(k)}$ forment une suite croissante. On trouve en effet

$$|H_n(t)| < 1/2 + n < An.$$

Pour établir (16), désignons par $K_n(t)$ le second membre de (11) et écrivons d'après (9)

$$K_n(t) = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)} \left(1/2 + \cos t + \ldots + \cos r t\right) = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)} \frac{\sin(r+1/2)t}{\sin t/2} =$$
$$= \frac{1}{\sin t/2} \mathfrak{J} \left\{ \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)} e^{(r+1/2)it} \right\} =$$
$$= \frac{1}{\sin t/2} \mathfrak{J} \left\{ e^{(n+1/2)it} \sum_{r=0}^{n} C_r^{(k-1)} e^{-rit} \right\}^{17)}$$

Par conséquent

$$\left| K_n(t) \right| \sin\frac{t}{2} \leq \left| \sum_{r=0}^{n} C_r^{(k-1)} e^{rit} \right| = \left| (1-e^{it})^{-k} - \sum_{r=n+1}^{\infty} C_r^{(k-1)} e^{rit} \right|$$
$$\leq \left| 1 - e^{it} \right|^{-k} + \left| \sum_{r=n+1}^{\infty} C_r^{(k-1)} e^{rit} \right|$$

Les nombres positifs $C_r^{(k-1)}$ formant une suite décroissante et tendant vers zéro, on peut écrire

$$\left| \sum_{r=n+1}^{\infty} C_r^{(k-1)} e^{rit} \right| = \left| \sum_{r=n+1}^{\infty} (C_r^{(k-1)} - C_{r+1}^{(k-1)}) (e^{(n+1)it} + \ldots + e^{rit}) \right| =$$
$$= \left| \sum_{r=n+1}^{\infty} (C_r^{(k-1)} - C_{r+1}^{(k-1)}) \frac{e^{(r+1)it} - e^{(n+1)it}}{e^{it} - 1} \right| <$$
$$< \frac{2}{|e^{it} - 1|} \sum_{r=n+1}^{\infty} (C_r^{(k-1)} - C_{r+1}^{(k-1)}) = \frac{2 C_{n+1}^{(k-1)}}{|e^{it} - 1|} < \frac{B_1 n^{k-1}}{|e^{it} - 1|}^{18)}$$

[16]) Ces inégalités subsistent encore pour d'autres valeurs de k. Pour $k = 0$ et pour $k = 1$, on les tire de formules explicites bien connues.

[17]) Nous posons comme d'ordinaire $\mathfrak{J}(a + ib) = b$.

[18]) Nous désignons par $B_1, B_2, \ldots$ des nombres finis ne dépendant que de k.

Par suite

$$\left|K_n(t)\right| < \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left(\left|1-e^{it}\right|^{-k} + B_1 n^{k-1}\left|1-e^{it}\right|^{-1}\right),$$

et puisque

$$\left|1-e^{it}\right| = 2\sin\frac{t}{2},$$

il vient

$$\left|K_n(t)\right| < 2^{-k}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-(k+1)} + \frac{B_1}{2}n^{k-1}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-2}$$

On a maintenant pour $\frac{1}{n} < t$, $n^{k-1} < t^{1-k}$. Par conséquent, d'après la dernière inégalité

$$\left|K_n(t)\right| < 2^{-k}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-(k+1)} + \frac{B_1}{2}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-2} t^{1-k} < B_2 t^{-(k+1)},$$

D'autre part, pour $0 \leqq t \leqq \frac{1}{n}$, on a d'après (15)

$$\left|K_n(t)\right| < An^{k+1} \leqq At^{-(k+1)}.$$

Les deux derniéres inégalités et la formule (7) montrent que (16) est valable pour tout l'intervalle $0 \leqq t \leqq \pi$.

7. Ce point établi, la démonstration de la généralisation que nous avons donnée du théorème de M. *Fejér,* s'achève dans la voie ordinaire.

Montrons d'abord que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|H_n(t)\right| dt$$

reste borné, lorsque n tend vers l'infini. Écrivons pour cela, en nous appuyant sur (15), (16) et sur (7)

$$(17)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|H_n(t)\right| dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} < \frac{A}{\pi}\frac{n}{n} + \frac{B\,n^{k}}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} t^{-(k+1)}\,dt < B_4.$$ [19])

[19]) On voit par ce qui précède que les conditions d'un théorème général bien connu concernant les intégrales singulières et dû à M. *Lebesgue* et à M. *Haar* sont toutes remplies. Au lieu d'appliquer ce théorème, nous exécutons le raisonnement qui y conduit, dans le cas particulier qui nous occupe.

Admettons maintenant avec M. *Fejér* que $\lim\limits_{t \to 0} {}^1/_2 \, (f(x+t) + f(x-t)) = S(x)$ existe. En introduisant dans $\varphi(t)$ (*voir* (13)) cette valeur de S, on aura $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 0$. En choisissant alors ε arbitrairement petit et en déterminant δ de façon que $|\varphi(t)| < \varepsilon$ pour $0 \leqq t \leqq \delta$, on aura d'après (14)

$$\left| \frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}} - S(x) \right| \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\varphi(t)| \, |H_n(t)| \, dt \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\delta |H_n(t)| \, dt + \frac{B\,\delta^{-(k+1)}\, n^{-k}}{\pi} \int_\delta^\pi |\varphi(t)| \, dt.$$

La fonction $f(t)$ étant intégrable au sens de Lebesgue, il en sera de même de la fonction $\varphi(t)$ et l'on aura $\int_\delta^\pi |\varphi(t)| \, dt \leqq \int_0^\pi |\varphi(t)| \, dt < C$, C étant une constante. Il vient alors d'après (17)

$$\left| \frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}} - S(x) \right| < B_1 \varepsilon + C \frac{B\,\delta^{-(k+1)} n^{-k}}{\pi}$$

Le dernier terme du second membre tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, ce second membre devient pour n assez grand $< B_5 \varepsilon$.

8. Plaçons nous maintenant dans les hypothèses du théorème de M. *Lebesgue* et démontrons la généralisation que M. *Hardy* a donnée de ce théorème. Soit $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, $\Phi(t) = \int_0^t |\varphi(v)| \, dv$ et $\Phi'(0) = 0$. Le nombre ε étant arbitrairement petit, déterminons δ de façon que $|\Phi(t)| < \varepsilon t$ pour $0 < t < \delta$. Écrivons enfin $S = f(x)$ dans (13). Il n'y a rien à changer à l'évaluation de l'intégrale $\int_\delta^\pi$. Quant à l'intégrale $\int_0^\delta$, écrivons

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(t)| \, |H_n(t)| \, dt < B\, n^{-k} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(t)| \; t^{-(k+1)} \, dt =$$

$$= B\, n^{-k} \left[\Phi(t)\, t^{-(k+1)}\right]_{\frac{1}{n}}^{\delta} + B(k+1) n^{-k} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Phi(t)\, t^{-(k+2)} \, dt <$$

$$< B\varepsilon + \varepsilon B(k+1)\, n^{-k} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} t^{-(k+1)}\, dt < B_6\, \varepsilon.$$

Enfin

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)|\; |H_n(t)|\, dt < A\, n \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)|\, dt = A\, n\, \Phi\left(\tfrac{1}{n}\right) < A\, \varepsilon.$$

En résumé, on voit que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} |\varphi(t)|\; |H_n(t)|\, dt < B_7\, \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration.

Les théorèmes précédents et leurs démonstrations subsistent — *mutatis mutandis* — si $\Sigma\,(a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x)$, au lieu d'être la série de *Fourier* d'une fonction intégrable au sens de *Lebesgue*, est la dérivée formelle de la série de *Fourier* d'une fonction à variation bornée.

Sur un théorème de la moyenne et ses applications.

Par M. MARCEL RIESZ à Stockholm.

1. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie pour $x \leqq 0$, intégrable au sens de M. *Lebesgue*. Pour fixer les idées, nous supposons encore que $\varphi(x)$ est une fonction bornée dans tout intervalle fini, hypothèse qui pourrait être remplacée par des hypothèses bien plus générales. Nous entendons par intégrale de *Liouville-Riemann* d'ordre α de la fonction $\varphi(x)$ l'expression

$$(1) \qquad I^{(\alpha)}(\varphi(x)) = \Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt, \quad 0 < \alpha.^{1)}$$

D'abord, on voit facilement que $\Phi_\alpha(x)$ est une fonction continue (et même que $\Phi_\alpha(x)$ satisfait à une condition de *Lipschitz* d'ordre α). D'autre part, en exprimant l'intégrale d'*Euler* de la première espèce par la fonction Γ, on établit le fait connu que l'opération en question est distributive par rapport à l'indice α, c'est-à-dire qu'on a

$$(2) \qquad I^{(\alpha+\beta)}(\varphi(x)) = I^{(\alpha)}\left[I^{(\beta)}\varphi(x)\right].$$

On a en particulier

$$(3) \qquad \Phi_1(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt,$$

$$(4) \qquad \Phi_{\alpha+1}(x) = \int_0^x \Phi_\alpha(t)\, dt$$

et

$$(5) \qquad \Phi'_{\alpha+1}(x) = \Phi_\alpha(x).$$

---

[1]) La limite inférieure *zéro* dans l'intégrale (1) peut évidemment être remplacée par un nombre fini quelconque et, avec des conditions supplémentaires sur $\varphi(x)$, aussi par $-\infty$.

2. Admettons maintenant que $0 < \alpha < 1$. Posons

$$(6) \qquad g(x, \xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\xi \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt\,, \qquad 0 \leqq \xi < x.$$

On a alors *le théorème de la moyenne*

$$(7) \qquad g(x, \xi) = \Phi_\alpha(\tau)$$

où

$$0 \leqq \tau < \xi.$$

Pour démontrer ce théoreme, admettons d'abord que la dérivée $\Phi'_\alpha(x)$ existe et que, par exemple, cette dérivée soit une fonction continue de x. Alors, évidemment, à cause de la distributivité de l'opération, $\varphi(x)$ sera l'intégrale d'ordre $(1-\alpha)$ de $\Phi'_\alpha(x)$, c'est-à-dire qu'on aura

$$(8) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \Phi'_\alpha(v)\,(t-v)^{-\alpha}\,dv.$$

En portant cela dans (6) et en observant que, sous les conditions admises, on peut intervertir l'ordre des intégrations, il vient

$$(9) \qquad g(x, \xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\xi (x-t)^{\alpha-1}\,dt \int_0^t \Phi'_\alpha(v)\,(t-v)^{-\alpha}\,dv =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\xi \Phi'_\alpha(v)\,dv \int_v^\xi (x-t)^{\alpha-1}\,(t-v)^{-\alpha}\,dt =$$

$$= \int_0^\xi \Phi'_\alpha(v)\,M(v)\,dv$$

où l'on a posé

$$(10) \qquad M(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_v^\xi (x-t)^{\alpha-1}\,(t-v)^{-\alpha}\,dt.$$

Comme on a, indépendamment de v et x,

$$(11) \qquad \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_v^x (x-t)^{\alpha-1}\,(t-v)^{-\alpha}\,dt = 1,$$

il résulte

$$(12) \qquad M(v) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_\xi^x (x-t)^{\alpha-1}\,(t-v)^{-\alpha}\,dt\,.$$

L'intégrale qui figure au second membre et dont les limites sont indépendantes de v, est évidemment croissante lorsqe v va de 0 à ξ. Par conséquent, $M(v)$ est une fonction décroissante. On pourra alors appliquer le second théorème de la moyenne du calcul intégral et écrire

$$(13) \qquad g(x,\xi) = M(0)\int_0^{\tau_1} \Phi'_\alpha(v)\,dv = M(0)\,\Phi_\alpha(\tau_1), \qquad 0 \leqq \tau_1 \leqq \xi.$$

Dans cette dernière formule, on a déjà utilisé le fait que $\Phi_\alpha(0) = 0$. Si l'on observe en outre que Φ_α est une fonction continue et que d'après (10), (11) et (12) on a $0 \leqq M(0) < 1$, on voit qu'il existe toujours un nombre τ $(0 \leqq \tau < \tau_1)$ tel que $M(0)\,\Phi_\alpha(\tau_1) = \Phi_\alpha(\tau)$ et alors notre théorème se trouve démontré.

3. Dans la démonstration qui précède, les hypothèses concernant Φ'_α nous permettaient d'écrire la formule (8) qui conduisait à la formule (9). Or, en utilisant l'intégrale de *Stieltjes*, on arrive sans aucune hypothèse sur Φ'_α à la formule analogue à (9)

$$(14) \qquad g(x,\xi) = \int_0^{\xi} M(v)\,d\,\Phi_\alpha(v).$$

Pour éviter le raisonnement assez délicat dont on a besoin pour arriver à (14), nous suivrons ici une autre voie plus laborieuse, qui pourtant a l'avantage de n'exiger que des calculs formels.

L'intégration par parties de (9), faite à un point de vue tout à fait formel, donne, en observant que $\Phi_\alpha(0) = 0$ et que $M(\xi) = 0$,

$$(15) \qquad g(x,\xi) = -\int_0^{\xi} \Phi_\alpha(v)\,M'(v)\,dv.$$

L'intégrale au second membre est absolument convergente, puisque $M'(v)$ ne devient infini, pour $v = \xi$, que de l'ordre α. Donnons maintenant une vérification directe de la dernière formule sans aucune hypothèse sur Φ'_α.

---

[3]) La formule (14) se vérifie immédiatement, si l'on démontre d'abord que l'on a, sous la condition que $\varphi(x)$ est bornée, presque partout

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x} (x-t)^{-\alpha}\,d\,\Phi_\alpha(t).$$

Dans un travail plus élaboré, nous mettrons au point le rôle qui revient à l'intégrale de *Stieltjes* dans toutes ces questions.

On a

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\xi \Phi_\alpha(v)\, M'(v)\, dv &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\xi M'(v)\, dv \int_0^v \varphi(t)\,(v-t)^{\alpha-1}\, dt = \\
(16) \qquad &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\xi \varphi(t)\, dt \int_t^\xi M'(v)\,(v-t)^{\alpha-1}\, dv.
\end{aligned}
$$

Or, on obtient par la distributivité (*voir* les formules (2)—(5)) et en intégrant par parties

$$
-\int_t^\xi M'(v)\,(v-t)^{\alpha-1}\, dt = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}\int_t^\xi M'(v)\,(v-t)^{\alpha}\, dv =
$$

$$
= \frac{d}{dt}\int_t^\xi M(v)\,(v-t)^{\alpha-1}\, dv =
$$

$$
= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\int_t^\xi (v-t)^{\alpha-1}\, dv \int_v^\xi (x-u)^{\alpha-1}\,(u-v)^{-\alpha}\, du\right) =
$$

$$
= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\int_t^\xi (x-u)^{\alpha-1}\, du \int_t^u (v-t)^{\alpha-1}\,(u-v)^{-\alpha}\, dv\right).
$$

En tenant encore compte de (11), cette expression se réduit à

$$
(x-t)^{\alpha-1}.
$$

Alors, en introduisant cela dans (16), la formule (15) se trouve établie.

En observant maintenant que $M'(v)$ est de signe constant, que $0 < M(v) < 1$ et que $M(\xi) = 0$, (7) se déduit de (15) par l'application du premier théorème de la moyenne du calcul intégral.

4. Nous passons maintenant aux applications de notre théorème. Ce théorème, je l'ai déjà donné sous des conditions plus restrictives dans une Note des *Comptes rendus*. (Une méthode équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, 12 juin 1911). C'est par ce théorème que j'y établis pour des indices non entiers que certaines moyennes que j'ai introduites sont entièrement équivalentes à celles de *Cesàro*. Les dites moyennes (sur lesquelles nous reviendrons au No. 11) sont sous plusieurs rapports plus maniables que celles de *Cesàro*, et ont un grand avantage sur ces dernières notamment dans la théorie des séries de *Dirichlet*.[3]) Or, dans cette théorie, le théorème de la moyenne que

[3]) Ainsi M. *Schnee* en travaillant (Acta Math. t. 35) avec les moyennes de *Cesàro*, obtenait d'abord des résultats très peu satisfaisants, pour arriver dans un supplément ajouté plus tard, en utilisant mon théorème d'équivalence, à des résultats simples.

nous venons d'établir, joue (même sous une forme bien plus particulière) un rôle fondamental pour tout ce qui concerne la sommation à ordres non entiers. (*Voir G. H. Hardy* and *M. Riesz*, The general theory of *Dirichlet*'s series, Cambr. Tracts of Math. No. 18 (1915). *Voir* en particulier le lemme 7 et ses applications). Disons enfin que notre théorème est trés utilisable dans le calcul aux différences à ordres non entiers, en élucidant le lien qui existe entre ces différences et les dérivées (et intégrales) de *Liouville—Riemann*. En remettant cette question à une autre occasion, je passe aux applications concernant certains théorèmes de *convexité.*

5. M. *H. Bohr*[4]) a démontré en se restreignant à *des séries de Dirichlet de la forme* $\Sigma a_n n^{-s}$ *et à des indices entiers de sommation* que *l'abscisse de sommabilité* des moyennes de Cesàro était une *fonction convexe de l'indice.* En combinant le théorème général qu'on va démontrer tout à l'heure avec les formules explicites pour les abscisses de sommabilité qui se trouvent dans le *Tract* cité (p. 45), on arrive à un théorème énoncé dans ce *Tract* (p. 60) qui dit que *le résultat de M. Bohr subsiste pour des séries de Dirichlet de la forme générale* $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ *et pour des indices de sommation quelconques, la méthode de sommation étant celle des moyennes typiques.*

Le théorème général qui suit, fut donné pour des indices *entiers* (et sous une forme un peu différente) par MM. *Hardy* et *Littlewood.*[5])

I. Soit α *un nombre positif quelconque. Admettons qu'il existe deux fonctions non décroissantes* $V(x)$ *et* $W(x)$, *telles que pour toute valeur positive de* x, *on ait*

$$|\varphi(x)| < V(x) \quad \text{et} \quad |\Phi_\alpha(x)| < W(x). \tag{17}$$

Soit en outre $0 < \alpha' < \alpha$. *Alors, il existe toujours une constante* C, *telle que*

$$|\Phi_{\alpha'}(x)| < C\left(V(x)\right)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}}\left(W(x)\right)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}. \tag{18}$$

La démonstration qui suit montre que C est même indépendant de α'.

[4]) *H. Bohr*, Bidrag til de Dirichlet'ske Raekkers Theorie. Thèse, Copenhague, 1910, p. 101.

[5]) *G. H. Hardy* and *J. E. Littlewood*, Contributions to the arithmetic theory of series, Lond. Math. Soc. Proc. (2) vol. 11. (1912).

Nous nous restreignons d'abord au cas $0<\alpha<1$, le cas général pouvant facilement être réduit sur ce cas particulier (*voir* le *n°* 10).

On a d'abord

$$\Phi_{\alpha'}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha')}\int_0^x \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt.$$

Nous déterminons ξ de façon que

$$x-\xi = \left(\frac{W(x)}{V(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{19}$$

Si cette équation donne pour ξ une valeur négative, nous posons $\xi=0$. (Dans ce dernier cas, la démonstration se simplifie, car l'intégrale que nous désignons dans la suite par I_1 n'intervient pas). On aura

$$\Gamma(\alpha')\,\Phi_{\alpha'}(x) = \int_0^x \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt = \int_0^\xi + \int_\xi^x = I_1 + I_2$$

et

$$|I_2| = \left|\int_\xi^x \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt\right| < V(x)\int_\xi^x (x-t)^{\alpha'-1}\,dt = \tag{20}$$

$$= V(x)\,\frac{(x-\xi)^{\alpha'}}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'}\Big(V(x)\Big)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big(W(x)\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}.$$

D'autre part

$$I_1 = \int_0^\xi \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt = \int_0^\xi \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,(x-t)^{\alpha'-\alpha}\,dt.$$

Puisque $\alpha'-\alpha$ est négatif, on a d'après le second théorème de la moyenne

$$I_1 = (x-\xi)^{\alpha'-\alpha}\int_u^\xi \varphi(\;)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt,\quad 0\leq u\leq \xi.$$

Alors, d'après notre théorème (7), la dernière intégrale est

$$=\Gamma(\alpha)\Big(\Phi_\alpha(\tau_2) - \Phi_\alpha(\tau_1)\Big),\quad 0<\tau_1<\xi<x,\ 0<\tau_2<\xi<x,$$

c'est-à-dire

$$|I_1| \leq 2\,\Gamma(\alpha)\,(x-\xi)^{\alpha'-\alpha}\,W(x) = \tag{21}$$

$$= 2\,\Gamma(\alpha)\Big(V(x)\Big)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big(W(x)\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}.\quad C.\,Q.\,F.\,D.$$

6. On a encore le théorème

II. Si pour $x \to \infty$, on a

(22) $$\varphi(x) : V(x) \to 0 \quad \textit{et} \quad |\Phi_\alpha(x)| < W(x)$$

ou

(23) $$|\varphi(x)| < V(x) \quad \textit{et} \quad \Phi_\alpha(x) : W(x) \to 0,$$

on aura aussi pour $0 < \alpha' < \alpha$

(24) $$\Phi_{\alpha'}(x) : \left(V(x)\right)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}} \left(W(x)\right)^{\frac{\alpha'}{\alpha}} \to 0.$$

Remarquons tout de suite que, si sous l'hypothèse (22) la fonction $V(x)$, ou sous l'hypothèse (23) la fonction $W(x)$ tend vers l'infini avec x, le dernier théorème se réduit facilement au théorème précédent. P. ex., sous l'hypothèse (22), on pourra alors trouver une fonction non décroissante $V_1(x)$ telle que $V_1(x) : V(x) \to 0$ et que, en remplaçant dans (22) $V(x)$ par $V_1(x)$, l'hypothèse (22) soit encore remplie. En appliquant alors le théorème *I*, le nouveau théorème découle. Nous pourrions donc dans la démonstration qui suit nous restreindre au cas où $V(x)$ ou $W(x)$ restent bornées respectivement. Or, du moins dans la démonstration de la première partie du théorème, cette hypothèse particulière n'amène aucune simplification. Quant à la seconde partie, nous la démontrons par un lemme que nous voulons établir sous des conditions aussi générales que possible. C'est pour ces raisons que, dans la démonstration suivante, la seule hypothèse faite au sujet de $V(x)$ et $W(x)$ c'est que ces fonctions sont non décroissantes.

7. Aussi dans la démonstration du théorème *II*, nous supposons d'abord $0 < \alpha < 1$.

Admettons d'abord l'hypothèse (22) et déterminons t_0 de façon que l'on ait

$$|\varphi(t)| < \varepsilon V(t), \qquad t > t_0,$$

ε étant un nombre arbitrairement petit. Cela étant, on détermine ξ par l'équation

$$x - \xi = \left(\frac{W(x)}{\varepsilon V(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

en posant $\xi = t_0$, si cette équation donne pour ξ une valeur $\leq t_0$.

a) Supposons d'abord $\xi > t_0$.

En posant, pour abréger,

(25) $$\left(V(x)\right)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}}\left(W(x)\right)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}=U(x),$$

on aura par le même raisonnement que plus haut

$$|I_2|=\left|\int_{\xi}^{x}\varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt\right|<\frac{\varepsilon^{1-\alpha'/\alpha}}{\alpha'}\,U(x)$$

et

$$|I_1|=\left|\int_{c}^{\xi}\varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt\right|<\frac{2\,\varepsilon^{1-\alpha'/\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,U(x).$$

b) Si l'équation donne pour ξ une valeur $\leq t_o$, nous posons

$$|I_2|=\left|\int_{t_o}^{x}\right|<\frac{V(x)}{\alpha'}\,(x-t_o)^{\alpha'}<\frac{\varepsilon^{1-\alpha'/\alpha}}{\alpha'}\,U(x)$$

et

$$|I_1|=\left|\int_{o}^{t_o}\right|<(x-t_o)^{\alpha'-1}\int_{o}^{t_o}|\varphi(t)|\,dt\to 0\quad\text{quand } x\to\infty.$$

Ainsi la démonstration de la première partie du théorème *II* se trouve achevée.

8. Pour arriver à la seconde partie, nous démontrons d'abord le lemme suivant:

Sous l'hypothèse (23), on a pour $0<\xi<x$, *uniformément en* ξ,

$$g(x,\xi):\;W(x)\to 0,\;x\to\infty,$$

la fonction $g(x,\xi)$ *étant encore définie par la formule* (6) *et* α *étant* <1.

La démonstration de ce lemme est immédiate, lorsque $W(x)$ tend vers l'infini avec x. En effet, en vertu de (7), on a

(26) $$g(x,\xi)=\Phi_\alpha(\tau),\qquad 0\leq\tau\leq\xi\leq x.$$

On pourra d'autre part d'après (23) déterminer t_1 de façon que

$$|\Phi_\alpha(t)|<\varepsilon\,W(t)\quad\text{pour}\quad t\geq t_1.$$

$W(x)$ tendant vers l'infini on pourra choisir x assez grand pour que

$$W(t_1)<\varepsilon\,W(x).$$

Le nombre τ figurant en (26) étant alors $\gtrless t_1$, on aura toujours

$$|g(x,\xi)|<\varepsilon\,W(x).$$

Lorsque $W(x)$ ne tend pas vers l'infini avec x, la démonstration de ce lemme devient un peu plus délicate.

Nous pourrons poser dans ce cas $W(x) \equiv 1$. Déterminons alors t_2 de façon que

(27) $$|\Phi_\alpha(t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad t > t_2$$

et désignons le maximum de $|\Phi_\alpha(t)|$ pour $0 \leqq t \leqq t_2$ par K.

Nous aurons par la formule (15) pour $\xi \leq t_2$

$$|g(x,\xi)| = \left|\int_0^\xi M'(v)\,\Phi_\alpha(v)\,dv\right| \leqq K\left|\int_0^\xi M'(v)\,dv\right| = K\,M(0) =$$

$$= \frac{K}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\xi (x-t)^{\alpha-1}\,t^{-\alpha}\,dt <$$

$$< \frac{K}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_2} (x-t)^{\alpha-1}\,t^{-\alpha}\,dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Pour $\xi > t_2$, on a d'autre part

$$|g(x,\xi)| \leqq \left|\int_0^{t_2} M'(v)\,\Phi_\alpha(v)\,dv\right| + \left|\int_{t_2}^\xi M'(v)\,\Phi_\alpha(v)\,dv\right| = \vartheta_1 + \vartheta_2.$$

Il vient

$$|\vartheta_1| < K\Big(M(0) - M(t_2)\Big) =$$

$$= \frac{K}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^\xi (x-t)^{\alpha-1}\,t^{-\alpha}\,dt - \int_{t_2}^\xi (x-t)^{\alpha-1}(t-t_2)^{-\alpha}\,dt\right)$$

$$< \frac{K}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_2} (x-t)^{\alpha-1}\,t^{-\alpha}\,dt \rightarrow 0,\ x \rightarrow \infty.$$

Enfin, d'après (27), on a

$$|\vartheta_2| < \varepsilon\,M(t_2) < \varepsilon.$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

9. Ce point établi, la seconde partie du théorème *II* résulte immédiatement. On choisit d'abord x assez grand pour que $|g(x,\xi)| < \varepsilon$ pour toute valeur de ξ, telle que $0 \leqq \xi \leqq x$. Aprés, on n'a qu'à déterminer ξ par l'équation

$$x - \xi = \left(\frac{\varepsilon\,W(x)}{V(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

(en posant $\xi = 0$ si cette équation donne une valeur négative) et appliquer le raisonnement qui a conduit à (18).

On pourra compléter le résultat qu'on vient de démontrer par le théorème suivant :

Si

$$|\varphi(x)| < V(x) \quad et \quad \Phi_\alpha(x) \to A,$$

$V(x)$ étant toujours une fonction non décroissante et A étant un nombre fini, on aura $\Phi_{\alpha'}(x) : \left(V(x)\right)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}} \to 0.$

Pour $A = 0$, ce théorème est un cas particulier de la seconde partie du théorème *II*. Pour réduire le cas de A quelconque au cas $A = 0$, posons

$$\overline{\varphi}(t) = \varphi(t) - \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

Alors on aura[6]) [*cf.* la formule (11)]

$$\overline{\Phi}_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \overline{\varphi}(t)(x-t)^{\alpha-1} dt = \Phi_\alpha(x) - A \to 0$$

et

$$\overline{\Phi}_{\alpha'}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha')} \int_0^x \overline{\varphi}(t)(x-t)^{\alpha'-1} dt = \Phi_{\alpha'}(x) - \frac{A}{\Gamma(1+\alpha'-\alpha)} x^{\alpha'-\alpha}$$

Par ces dernières formules, on a obtenu la réduction désirée.

10. Reste à se débarrasser dans les théorèmes précédents de la restriction $\alpha < 1$. Soit maintenant α un nombre positif quelconque. Déterminons un nombre entier n de façon que $\frac{\alpha}{n} < {}^1/_2$ et posons $\alpha_k = \frac{k\alpha}{n}$ $(k = 1, 2, \dots n-1)$. Si l'on établit maintenant les théorèmes précédents pour les valeurs particulières $\alpha' = \alpha_k$, on n'aura qu'à appliquer encore une fois ces théorèmes sous la restriction $\alpha < 1$, pour les obtenir sans aucune restriction.

Occupons-nous d'abord du théorème *I*. Posons

$$\Psi_\beta(x) = \operatorname{Max} |\Phi_\beta(t)| \text{ pour } 0 \leq t \leq x.$$

Or, il est clair que les fonctions Ψ ne sont pas décroissantes. On trouve alors d'après le théorème démontré tout à l'heure (en y remplaçant $V, \Phi_{\alpha'}, W$ par $\Psi_{\alpha_{k-1}}, \Psi_{\alpha_k}, \Psi_{\alpha_{k+1}}$)

$$\Psi_{\alpha_k}(x) < C \sqrt{\Psi_{\alpha_{k-1}}(x)\,\Psi_{\alpha_{k+1}}(x)}. \tag{28}$$

[6]) L'infinitude que $\overline{\varphi}(t)$ présente à l'origine n'amène aucune difficulté.

Cette inégalité est valable pour $k = 1, 2, \dots n-1$, si l'on pose $\Psi_{\alpha_0} = \Psi_0 = V$ et $\Psi_{\alpha_n} = \Psi_\alpha = W$.

Soit maintenant l un quelconque des nombres $1, 2, \dots n-1$. Élevons ces inégalités correspondant à $k = 1, 2, \dots l-1, l, l+1, \dots n-2, n-1$ aux puissances repectives $(n-l)$, $2(n-l)$, $\dots, (l-1)(n-l)$, $l(n-l)$, $(n-l-1)l, \dots, 2l, l$. On trouve par multiplication

$$\Psi_{\alpha_l}(x) < C^{l(n-l)} \left(V(x)\right)^{1-\frac{l}{n}} \left(W(x)\right)^{\frac{l}{n}} =$$

$$= C^{l(n-l)} \left(V(x)\right)^{1-\frac{\alpha_l}{\alpha}} W(x)^{\frac{\alpha_l}{\alpha}}$$

et alors, d'après ce qu'on a dit, le théorème *I* résulte sans aucune restriction.

En s'appuyant maintenant sur ce théorème, la première partie de *II* se démontre de proche en proche pour $\alpha' = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$, tandis que la seconde se démontre de proche en proche pour $\alpha' = \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots \alpha_1$. Cela étant, ce théorème résulte aussi sans aucune restriction.

11. Quant aux applications des théorèmes qu'on vient de démontrer, en voici une concernant les moyennes auxquelles nous avons fait allusion au n^0 4.

Soit $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n$ une série quelconque. Posons

$$\sigma_k(\omega) = \sum_{n=0}^{[\omega]} a_n (\omega - n)^k \qquad k \geqq 0.$$

Si la limite

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} \sigma_k(\omega) = \sigma$$

existe et est finie, nous disons que la série Σa_n est *sommable* d'ordre k avec la somme σ.

Les moyennes $\omega^{-k} \sigma_k(\omega)$ sont équivalentes aux moyennes de *Cesàro* d'ordre k dans le sens qu'une série quelconque est sommable en même temps et avec la même somme par ces deux espèces de moyennes. De plus, si pour une série, les moyennes d'ordre k de *Cesàro* sont bornées, il en sera de même pour nos moyennes d'ordre k et inversement.

Cela posé, on voit que dans le théorème qui suit, on pourra entendre par „moyennes" celles de *Cesàro* ou les nôtres. Ajoutons encore qu'on peut donner une démonstration directe pour les moyennes de *Cesàro*, cette démonstration étant très analogue à celle du texte.

Voici le théorème en question.

Si une série Σa_n est sommable par des moyennes d'un certain ordre et que ses moyennes d'ordre k sont bornées, alors la série est sommable par des moyennes d'ordre quelconque $> k$.[7])

La démonstration est immédiate. La série soit sommable d'ordre l. Il suffit évidemment de considérer des indices $< l$.

En changeant au besoin a_0, on pourra supposer que la somme de la série est zéro. On appliquera alors la seconde partie du théorème *II* en posant $\varphi(x) = \sigma_k(x)$, $\Phi_{k'-k}(x) = \text{const.}\, \sigma_{k'}(x)$, $\Phi_{l-k}(x) = \text{const.}\, \sigma_l(x)$, $V(x) = x^k$, $W(x) = x^l$, on trouve pour $k < k' < l$

$$\frac{\sigma_{k'}(x)}{x^{k'}} \to 0, \quad x \to \infty \qquad C.\,Q.\,F.\,D.$$

12. Voici encore une application. En combinant nos théorèmes avec un théorème sur les séries de *Dirichlet* que j'ai donné il y a bien longtemps et dont la démonstration paraîtra prochainement,[8]) on trouve la généralisation suivante d'un théorème de MM. *Hardy* et *Littlewood*.[9])

Si la série de Dirichlet $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est sommable par les moyennes typiques[10]) *d'ordre r pour $s = 0$ et qu'elle est sommable d'ordre $(r-l)$ $(l < r)$ pour une valeur s dont la partie réelle est β (> 0), la série sera sommable d'ordre $(r-k)$ $(k < l)$ pour toute valeur s dont la partie réelle est $\geqq \frac{k\beta}{l}$. Le théorème subsiste, si dans l'une des hypothèses, au lieu de la sommabilité, on suppose seulement que les moyennes en question restent bornées.*

---

7) MM. *Hardy* et *Littlewood* ont donné une application très remarquable de ce théoreme dans leur Note: On the *Fourier* series of a bounded function, Lond. Math. Soc. Proc. (2) vol 17 (1917) p. XIII—XV (Records of Proceedings at Meetings).

8) Über die Summierbarkeit durch typische Mittel (paraîtra dans ce journal). Au lieu de combiner les résultats ci-dessus avec ceux du travail que je viens de citer, on pourra rester dans la voie indiquée plus haut en utilisant certaines formules de transformation données dans le *Tract* cité.

9) *Voir* le théorème 19 du travail cité au *n°* 5.

10) Par moyennes typiques on pourra entendre ici, soit celles de première espèce, soit celles de seconde espèce; *cf.* le *Tract* cité p. 21 et suiv.

On trouvera beaucoup d'applications très intéressantes de notre théorème de la moyenne et des théorèmes *I* et *II* dans un Mémoire étendu de M. *K. Ananda Rau.*[11]) On y trouve, en particulier, un examen approfondi des questions de convexité concernant les abscisses de sommabilité et une généralisation remarquable du théorème de *Schnee-Landau.*[12])

---

[11]) *K. Ananda Rau,* On the convergence and summability of *Dirichlet's* series. Je ne sais pas si ce Mémoire a déjà paru ou non.

[12]) *E. Landau, Handbuch,* p. 853 et suiv.

Über die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen.

Von JULIUS v. SZ. NAGY in Kolozsvár.

Vorliegende Abhandlung behandelt die Frage nach der Lage der Wurzeln der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{s} a_k f_k(x) = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{1}{f_k(x)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{f_k(x)}{g_k(x)} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_k nichtnegativ sind, wenn die Wurzeln der Gleichungen n-ten Grades

$$f_k(x) = (x-\alpha_{k1})(x-\alpha_{k2}) \dots (x-\alpha_{kn}) = 0,$$
$$g_k(x) = (x-\beta_{k1})(x-\beta_{k2}) \dots (x-\beta_{kn}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

bekannt sind.

Bezüglich Litteratur verweisen wir auf zwei Abhandlungen des Verfassers, in denen speziellere oder verwandte Fragen behandelt wurden.[1])

1. In diesen Untersuchungen spielt ein dem konvexen Polygon P zugeordnetes, von Kreisbögen begrenztes Gebiet T_n eine wichtige Rolle. Dieses Gebiet ist dadurch gekennzeichnet, dass aus jedem Randpunkte desselben das Polygon unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ zu sehen ist, d. h. aus jedem Randpunkte kann man an das Polygon solche Stützgerade ziehen, die einen Winkel $= \frac{\pi}{n}$ miteinander bilden.

[1]) Geometrische Relationen zwischen den Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion und ihrer logarithmischen Derivierten (ungarisch); Über die Lage der Wurzeln von polaren Gleichungen (ungarisch), Mathematikai és Természettudományi Értesitő, Bd. 38 (1922), S. 429—441 bezw. 441—455.

Aus dieser Definition folgt, dass das Polygon P im Gebiete T_n liegt, wenn $n \geqq 1$ ist. Im Falle $n = 1$ stimmen die Bereiche P und T_n überein.

Ist C_n die Randkurve von T_n, so wird sie von jeder Geraden, die wenigstens einen Punkt mit P gemeinsam hat, in zwei Punkten geschnitten, welche durch das Polygon voneinander getrennt werden.

Dies folgt aus dem leicht beweisbaren Satze:

Ist Q ein ausserhalb des konvexen Gebietes G liegender Punkt einer Geraden q, von der das Gebiet G wenigstens in einem Punkte getroffen wird, so nimmt der Winkel der Stützgeraden aus Q an G beständig zu, wenn Q sich entlang q dem Gebiete G nähert.

Die Kurve C_n kann sich also in keinem Punkte kreuzen. Das Gebiet T_n ist einfach zusammenhängend.

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_m$ die nacheinander folgenden Ecken des m-seitigen konvexen Polygons P und bezeichnet $\overrightarrow{A_h A_k}$ den die Strecke $A_h A_k$ enthaltenden Halbstrahl mit dem Anfangspunkte A_h, so kann man den Bogen $B_1 B_2$ von C_n, der in dem von den Halbstrahlen $\overrightarrow{A_m A_1}$ und $\overrightarrow{A_1 A_2}$ begrenzten Winkelraume liegt, auf folgende Weise konstruieren:

Bedeutet $\overrightarrow{A_{r+1} A_r}$ den ersten in der Reihe der Halbstrahlen

$$\overrightarrow{A_2 A_1},\ \overrightarrow{A_3 A_2},\ \overrightarrow{A_4 A_3},\ \ldots;\ \overrightarrow{A_{h+1} A_h},\ \ldots$$

von dem der Halbstrahl $\overrightarrow{A_m A_1}$ entweder nicht geschnitten, oder unter einem Winkel $< \frac{\pi}{n}$ geschnitten wird, und ist $B_1 B_1^{(r)}$ derjenige zwischen $\overrightarrow{A_m A_1}$ und $\overrightarrow{A_{r+1} A_r}$ fallende Kreisbogen, aus dessen Punkten die Strecke $A_1 A_r$ unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ zu sehen ist, so ist der Bogen $B_1 B_1^{(r)}$ in dem Bogen $B_1 B_2$ enthalten. Um nun den Punkt B_2 zu erhalten, bezeichnen wir mit $B_1^{(r+1)}$ den Schnittpunkt des Halbstrahls $\overrightarrow{A_{r+2} A_{r+1}}$ mit dem Kreise durch die Punkte A_1, A_{r+1}, $B_1^{(r)}$, mit $B_1^{(r+k)}$ den Schnittpunkt des Halbstrahls $\overrightarrow{A_{r+k+1} A_{r+k}}$ mit dem Kreise durch die Punkte A_1, A_{r+k}, $B_1^{(r+k-1)}$. Ist nun $B_1^{(r+s-1)} B_1^{(r+s)}$ der erste in der Reihe der Kreisbögen

$$B_1^{(r)} B_1^{(r+1)},\ B_1^{(r+1)} B_1^{(r+2)},\ \ldots,\ B_1^{(r+k-1)} B_1^{(r+k)},\ \ldots$$

von welchem der Halbstrahl $\overrightarrow{A_1 A_2}$ getroffen wird, so ist B_2 der Treffpunkt und der gesuchte Bogen $B_1 B_2$ besteht aus den s Kreisbögen

$$B_1 B_1^{(r)},\ B_1^{(r)} B_1^{(r+1)},\ B_1^{(r+1)} B_1^{(r+2)}, \dots,\ B_1^{(r+s-1)} B_2$$

Trifft der Halbstrahl $\overrightarrow{A_2 A_3}$ die Kurve C_n (ausserhalb der Strecke $A_2 A_3$) im Punkte B_3, so kann der Bogen $B_2 B_3$ ebenso konstruiert werden, wie der Bogen $B_1 B_2$.

Es ist klar, dass jene Ecken des Polygons P, bei welchen die Winkel grösser als $\frac{\pi}{n}$ sind, für $n > 1$ im Innern des Gebietes T_n liegen, während die übrigen Ecken zugleich auch Ecken der Kurve C_n sind. Es ist auch leicht einzusehen, dass die beiden Punkte, in denen die Kurve C_n $(n > 1)$ von einer verlängerten Seite des Polygons P getroffen wird, für C_n Ecken sind. Daraus folgt der Satz:

Hat das m-seitige konvexe Polygon h Ecken, bei denen die Winkel kleiner als $\frac{\pi}{n}$ *sind und k Seitenpaare, die miteinander den Winkel* $\frac{\pi}{n}$ *bilden, so besteht die Kurve* C_n *aus* $2m - (k+h)$ *Kreisbögen.*

Reduziert sich das Polygon P auf eine Strecke AB, so ist das Gebiet T_n ein symmetrisches Kreisbogenzweieck mit den Ecken A und B und mit dem Winkel $\frac{2n-2}{n}\pi$. Dieses Gebiet wird von den Punkten der beiden Kreise gebildet, die durch die Punkte A und B hindurchgehen und mit der Strecke AB den Winkel $\frac{\pi}{n}$ bilden. Dieses Gebiet wird im Folgenden *Kreispaar* genannt und mit K^n bezeichnet.

Wir „legen über die Punkte A und B das Kreispaar K^n“, wenn wir das Kreispaar K^n mit den Ecken A und B konstruieren.

2. Es gilt der

Satz I. *Ist P das kleinste konvexe Gebiet, in dem alle Wurzeln der Gleichungen n-ten Grades*

$$f_k(x) = (x - \alpha_{k1})(x - \alpha_{k2}) \dots (x - \alpha_{kn}) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

enthalten sind, so liegt jede Wurzel der Gleichungen

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_s f_s(x) = 0 \tag{1}$$

oder

$$\frac{a_1}{f_1(x)} + \frac{a_2}{f_2(x)} + \dots + \frac{a_s}{f_s(x)} = 0, \tag{2}$$

wo die Koeffizienten a_k beliebige nichtnegative reelle Zahlen sind (unabhängig von der Zahl s) *im Gebiete T_n,* (aus dessen Randpunkten das Polygon P unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ zu sehen ist).

Dieses Gebiet, in dem alle Wurzeln der Gleichungen (1) und (2) enthalten sind, kann im allgemeinen nicht verkleinert werden.

Es seien

$$x-\alpha_{kh}=r_{kh}\,e^{-i\varphi_{kh}} \text{ und } \varphi_k=\frac{\varphi_{k1}+\varphi_{k2}+\dots+\varphi_{kn}}{n}$$

$$(k=1, 2, \dots, s,\ h=1, 2, \dots, n),$$

so erhält man durch Multiplikation mit $e^{in\delta}$ bezw. $e^{-in\delta}$ (wo δ einen Winkel bedeutet) aus der Gleichung (1) bezw. (2) die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{s} a_k r_{k1} r_{k2} \dots r_{kn} [\cos n(\varphi_k-\delta)-i \sin n(\varphi_k-\delta)]=0$$

und

$$\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\cos n(\varphi_k-\delta)+i \sin n(\varphi_k-\delta)}{r_{k1} r_{k2} \dots r_{kn}}=0.$$

In diesen Gleichungen kann nicht jeder der Werte $\sin n(\varphi_k-\delta)$ positiv ausfallen. Es kann also nicht für jeden Winkel φ_k die Ungleichung

$$(3) \qquad \delta<\varphi_k<\delta+\frac{\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, s)$$

und somit auch nicht für jede φ_{kh} die Ungleichung

$$\delta<\varphi_{kh}<\delta+\frac{\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, s;\ h=1, 2, \dots, n)$$

bestehen. Damit ist bewiesen, dass die Wurzeln von (1) und (2) im Gebiete T_n liegen.

Der Satz I ist genau. Betrachten wir nämlich die Gleichung

$$(4) \qquad a_1(x+1)^n+a_2(x-1)^n=0,$$

so folgt aus derselben:

$$\frac{x-1}{x+1}=\left|\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}}\right| e^{\frac{k}{n}\pi i} \quad (k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots).$$

Die Gleichungen

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{k}{n}\pi \quad (k=\pm 1, \pm 3, \dots)$$

stellen $\frac{n}{2}$ Kreise bezw. $\frac{n-1}{2}$ Kreise und die Strecke $(-1, +1)$ dar, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die Wurzeln der Gleichung (4) sind die Schnittpunkte der $\frac{n}{2}$ Kreise bezw. der $\frac{n-1}{2}$ Kreise und der Strecke $(-1, +1)$ mit dem Orthogonalkreise

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \left|\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}}\right|.$$

Verändert sich der Quotient $\frac{a_1}{a_2}$ von Null bis $+\infty$ stetig, so beschreiben die beiden dem Betrage nach grössten Wurzeln der Gleichung (4) den Rand C_n des Gebietes T_n, d. h. den Rand des Kreispaares K^n über die Punkte -1, 1.

Aus dem Satze I folgt der

Satz II. *Liegen alle Wurzeln der Gleichungen n-ten Grades $f_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$, in denen die Koeffizienten von x^n positiv sind in einem Kreise vom Radius r, so liegen die Wurzeln der Gleichungen*

$$\sum_{k=1}^{s} a_k f_k(x) = 0 \text{ und } \sum_{k=1}^{s} \frac{a_k}{f_k(x)} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_k nichtnegativ sind, alle in dem konzentrischen Kreise mit dem Radius $\dfrac{r}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

Aus den Punkten des Direktorkreises einer Ellipse wird die Ellipse unter rechtem Winkel gesehen, also gilt der folgende Satz:

Liegen die Wurzeln der Gleichungen zweiten Grades $f_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$, in denen die Koeffizienten von x^2 positiv sind, alle in einer Ellipse, so liegen die Wurzeln der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{s} a_k f_k(x) = 0 \text{ und } \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{1}{f_k(x)} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_k nichtnegativ sind, alle im Direktorkreise der Ellipse.

3. Es gilt auch der folgende Satz:

Satz III. *Ist P das kleinste konvexe Gebiet, in dem alle Wurzeln der Gleichungen n-ten Grades*

$$f_k(x) = (x-\alpha_{k1})(x-\alpha_{k2}) \ldots (x-\alpha_{kn}) = 0,$$
$$g_k(x) = (x-\beta_{k1})(x-\beta_{k2}) \ldots (x-\beta_{kn}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

enthalten sind, so liegt jede Wurzel der Gleichungen

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{f_k(x)}{g_k(x)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{g_k(x)}{f_k(x)} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_k nichtnegativ sind, in dem Gebiete T_{2n}.

Es seien

$$x - \alpha_{kh} = r_{kh} e^{-i\varphi_{kh}},\ x - \beta_{kh} = \varrho_{kh} e^{-i\psi_{kh}},\ \varphi_k = \frac{\varphi_{k1} + \varphi_{k2} + \dots + \varphi_{kn}}{n}$$

$$\psi_k = \frac{\psi_{k1} + \psi_{k2} + \dots + \psi_{kn}}{n} \quad (h = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, s),$$

so können aus (5) die Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{r_{k1} r_{k2} \dots r_{kn}}{\varrho_{k1} \varrho_{k2} \dots \varrho_{kn}} [\cos n(\varphi_k - \psi_k) + i \sin n(\varphi_k - \psi_k)] = 0, \\ &\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\varrho_{k1} \varrho_{k2} \dots \varrho_{kn}}{r_{k1} r_{k2} \dots r_{kn}} [\cos n(\varphi_k - \psi_k) + i \sin n(\varphi_k - \psi_k)] = 0 \end{aligned}$$

abgeleitet werden.

Besteht für jede positive Zahl $k (\leqq s)$ die Ungleichung

$$(7)\qquad -\frac{\pi}{2n} < \varphi_k - \psi_k < \frac{\pi}{2n},$$

so sind die reellen Teile der Glieder in den Gleichungen (6) alle positiv, die linke Seite kann also nicht verschwinden. Daraus folgt der Satz III.

Der Satz III ist genau, wie aus der Gleichung

$$a_1 (x+1)^{2n} + a_2 (x-1^{2n} = 0$$

folgt, die sich auch in der Form

$$a_1 \frac{(x+1)^n}{(x-1)^n} + a_2 \frac{(x-1)^n}{(x+1)^n} = 0$$

darstellen lässt.

Bestehen die Ungleichungen

$$(8)\qquad -\frac{\pi}{2n} < \varphi_{kh} - \psi_{kh} < \frac{\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, s;\ h = 1, 2, \dots, n),$$

so bestehen auch die Ungleichungen (7). Daraus folgt der

Satz IV. *Sei*

$$f_k(x) = (x - \alpha_{k1})(x - \alpha_{k2}) \dots (x - \alpha_{kn}),$$

$$g_k(x) = (x - \beta_{k1})(x - \beta_{k2}) \dots (x - \beta_{kn}) \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

und bedeutet K_{kh}^{2n} das Kreispaar K^{2n} über die Punkte α_{kh} und β_{kh}, *so liegt keine Wurzel der Gleichungen mit nichtnegativen Koeffizienten* a_k

$$\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{f_k(x)}{g_k(x)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{g_k(x)}{f_k(x)} = 0, \tag{5}$$

ausserhalb der ns *Kreispaare* K_{kh}^{2n}.

Wir bezeichnen die Menge der Punkte der ns *Kreispaare mit* M. *Vertauscht man die Reihenfolge der Wurzeln der Gleichungen* $f_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$, *so erhält man verschiedene* [im Allgemeinen $(n!)^s$] *Punktmengen* M.

Sind $M_1, M_2, \ldots, M_v$ *verschiedene* M-*Punktmengen und ist* M^* *ihre Durchschnittsmenge, so liegt keine Wurzel der Gleichungen (5) ausserhalb* M^*.

Die Sätze III und IV lassen sich auf folgende Weise verallgemeinern:

Satz V. *Ist* P *das kleinste konvexe Gebiet, in dem alle Wurzeln der Gleichungen*

$$\begin{aligned} f_k(x) &= (x-\alpha_{k1})(x-\alpha_{k2})\ldots(x-\alpha_{kn_k}) = 0 \\ g_k(x) &= (x-\beta_{k1})(x-\beta_{k2})\ldots(x-\beta_{kn_k}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s) \end{aligned} \tag{9}$$

enthalten sind, sind

$$n_1 - m_1 = n_2 - m_2 = \ldots = n_s - m_s = p \geqq 0$$

und ist n *die grösste der Zahlen* n_k, *so liegt jede Wurzel der Gleichungen*

$$\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{f_k(x)}{g_k(x)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{g_k(x)}{f_k(x)} = 0, \tag{10}$$

mit nichtnegativen Koeffizienten a_k *in dem zu* P *gehörigen Gebiete* T_{2n}.

Ordnet man die m_k *ersten Wurzeln der Gleichungen* $f_k(x) = 0$ *und* $g_k(x) = 0$ *paarweise einander zu, ordnet man den übrigen* p *Wurzeln der Gleichung* $f_k(x) = 0$ *eine beliebige komplexe Zahl* γ *zu und legt man über diese* n_k *Punktpaare je ein* K^{2n_k} $(k = 1, 2, \ldots, s)$, *so liegt keine Wurzel der Gleichungen (10) ausserhalb der* $n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ *Kreispaare.*

Bezeichnet M *die Menge der Punkte dieser Kreispaare, so verändert sie sich durch die Veränderung des beliebig angenommenen Punktes* γ *und der Zuordnung der Wurzelpaare von den Gleichungen* $f_k(x) = 0$ *und* $g_k(x) = 0$.

Sind $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ verschiedene M-Punktmengen und ist M^* ihre Durchschnittsmenge, so liegt jede Wurzel der Gleichungen (10) in der Punktmenge M^*.

Multipliziert man in der ersten (zweiten) der Gleichungen (10) den Nenner bezw. Zähler (den Zähler bezw. Nenner) des k-ten Gliedes mit $(x-\gamma)^{n-n_k+p}$ bezw. mit $(x-\gamma)^{n-n_k}$, wo γ eine in dem Gebiete T liegende komplexe Zahl bedeutet, so haben die Gleichungen (10) die Form (5). Damit ist der Satz V bewiesen.

4. Dividiert man die Gleichung (1) und multipliziert man die Gleichung (2) mit einer beliebigen Funktion n-ten Grades

$$g(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n),$$

die mit einer der Funktionen $f_k(x)$ ($k=1, 2, \ldots, s$) zusammenfallen kann, so erhält man eine Gleichung von der Form (5). Also gilt der folgende

Satz V. *Sind*

$$f_k(x)=(x-\alpha_{k1})(x-\alpha_{k2})\ldots(x-\alpha_{kn}) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

bedeuten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ beliebige Zahlen und bezeichnet K_{kh}^{2n} das Kreispaar K^{2n} über die Punkte α_{kh} und β_h, so liegt keine Wurzel der Gleichungen mit nichtnegativen Koeffizienten

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{s} a_k f_k(x)=0, \quad \sum_{k=1}^{s}\frac{a_k}{f_k(x)}=0$$

ausserhalb der Menge M, bestehend aus den Punkten der ns Kreispaare K_{kh}^{2n}.

Sind $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ verschiedene M-Punktmengen mit der Durchschnittsmenge M^*, so liegt jede Wurzel der Gleichungen (11) *in der Menge M^*.*

Satz VI. *Zerfällt die durch den vorigen Satz definierte Punktmenge M^* in μ zusammenhängende Bereiche $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$, so hat die Gleichung*

$$(1) \qquad a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)+\ldots+a_s f_s(x)=0$$

im Bereiche B_h für jedes System nichtnegativer Zahlen a_k (die nicht alle verschwinden) eine feste Anzahl Wurzeln. Im Bereiche B_h haben also auch die Gleichungen $f_1(x)=0, f_2(x)=0, \ldots, f_s(x)=0$ die gleiche Anzahl Wurzeln.

Lässt man nämlich in der Gleichung (1) die nichtnegativen Zahlen a_k sich stetig verändern, so kann keine Wurzel von (1) aus einem Bereich B_h heraustreten, ohne zugleich auch M^* zu verlassen, was jedoch nach Satz V ausgeschlossen ist. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Wir wollen nun die obigen Resultate für den Spezialfall $s=2$, d. h für die Gleichung

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) = 0, \tag{12}$$

wo

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \\ f_2(x) &= (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n) \end{aligned} \tag{13}$$

und die Koeffizienten a_1 und a_2 nichtnegativ ($a_1 + a_2 > 0$) sind, weiterführen.

Die Gleichung (12) lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_k)} + \\ & + a_2 \frac{(x-\beta_{k+1})(x-\beta_{k+2}\ldots(x-\beta_n)}{(x-\alpha_{k+1})(x-\alpha_{k+2}\ldots(x-\alpha_n)} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

im Falle $n = 2m+1$ auch in der Form

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_m)} \sqrt{\frac{x-\alpha_{m+1}}{x-\beta_{m+1}}} + \\ & + a_2 \sqrt{\frac{x-\beta_{m+1}}{x-\alpha_{m+1}}} \frac{(x-\beta_{m+2})(x-\beta_{m+3})\ldots(x-\beta_n)}{(x-\alpha_{m+2})(x-\alpha_{m+3})\ldots(x-\alpha_n)} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

darstellen.

Es seien

$$x-\alpha_k = r_k e^{-i\varphi_k}, \quad x-\beta_k = \varrho_k e^{\,i\psi_k},$$

so haben die einen Glieder von (14) bezw. (15) Argumente gleich

$$\begin{aligned} & -[(\varphi_1-\psi_1)+(\varphi_2-\psi_2)+\ldots+(\varphi_k-\psi_k)], \\ & -[(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})+(\varphi_{k+2}-\psi_{k+2})+\ldots+(\varphi_n-\psi_n)] \end{aligned} \tag{16}$$

bezw.

$$\begin{aligned} & -\left[(\varphi_1-\psi_1)+(\varphi_2-\psi_2)+\ldots+(\varphi_m-\psi_m)+\frac{\varphi_{m+1}-\psi_{m+1}}{2}\right], \\ & \left[\frac{\varphi_{m+1}-\psi_{m+1}}{2}+(\varphi_{m+2}-\psi_{m+2})+(\varphi_{m+3}-\psi_{m+3})+\ldots+(\varphi_n-\psi_n)\right] \end{aligned} \tag{17}$$

Bestehen für (16) die Ungleichungen

$$-\frac{\pi}{2k} < \varphi_h - \psi_h < \frac{\pi}{2k} \text{ und } -\frac{\pi}{2(n-k)} < \varphi_{k+l} - \psi_{k+l} < \frac{\pi}{2(n-k)} \tag{18}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, k;\ l = 1, 2, \ldots, n-k),$$

oder bestehen für (17) die Ungleichungen

$$(19) \qquad -\frac{\pi}{n} < \varphi_h - \psi_h < \frac{\pi}{n} \quad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

so liegen beide Argumente in (16) und (17) zwischen $\frac{-\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Der reelle Teil der Gleichungen (14) und (15) kann also nicht verschwinden. Daraus folgt der

Satz VI. *Ordnet man die Wurzeln der Gleichungen*

$$f_1(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = 0,$$
$$f_2(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2\ldots(x-\beta_n) = 0$$

auf eine beliebige Weise paarweise einander zu und legt man über jedes der n Wurzelpaare α_h, β_h je ein Kreispaar K^n, so liegen alle Wurzeln der Gleichung

$$(12) \qquad a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) = 0$$

mit nichtnegativen Koeffizienten a_1, a_2 in den n Kreispaaren.

Legt man über k der Wurzelpaare α_h, β_h je ein Kreispaar K^{2k}, über die übrigen $n-k$ Paare der Wurzeln je ein Kreispaar $K^{2(n-k)}$, so enthalten auch diese n Kreispaare jede Wurzel von (12).

Bezeichnet M die Menge der Punkte eines Systems von n Kreispaaren, die jede Wurzel der Gleichung (12) enthalten und sind M_1, M_2, ..., M_ν verschiedene M-Punktmengen mit der Durchschnittsmenge M^*, so liegt keine Wurzel von (12) ausserhalb der Punktmenge M^*.

Ebenso, wie der Satz VI, ergeben sich auch die folgenden beiden Sätze.

Satz VII. *Hat ein Kreispaar keinen gemeinsamen Punkt mit irgend einem der übrigen $n-1$ Kreispaare des Systems, so enthält das Kreispaar genau eine Wurzel der Gleichung. Bilden h Kreispaare einen zusammenhängenden Bereich B und hat B keinen gemeinsamen Punkt mit irgend einem der übrigen $n-h$ Kreispaare des Systems, so hat die Gleichung (12) genau h Wurzeln im Gebiete B*

Satz VIII. *Zerfällt die durch den Satz VI definierte Punktmenge M^* in μ verschiedene zusammenhängende Bereiche B_1, B_2, ..., B_μ, die miteinander nicht zusammenhängen, so hat jede der Gleichungen (12) mit beliebigen nichtnegativen Koeffizienten a_1, a_2 im Gebiete B_h dieselbe Anzahl Wurzeln.*

An den Nullstellen der Gleichung (12) nimmt die rationale Funktion

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

einen reellen nichtpositiven Wert an. Die Sätze VI, VII und VIII gelten also auch für diejenigen Stellen, in denen die Funktion $F(x)$ einen nichtpositiven reellen Wert annimmt.

7. Wir beweisen endlich die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von *R. Jentzsch*:[2])

IX. *Es sei T der kleinste konvexe Bereich, der sämtliche Wurzeln der Gleichungen*

$$F_1(x) \equiv f(x) - g_1(x) = 0, \quad F_2(x) \equiv f(x) - g_2(x) = 0$$

enthält, wo $f(x)$ eine ganze rationale Funktion n-ten Grades ist, $g_1(x)$ und $g_2(x)$ solche ganze rationale Funktionen bedeuten, die höchstens den Grad $m \leq n-1$ haben. Sind a_1 und a_2 beliebige positive Zahlen, so liegen die Wurzeln der Gleichung

$$(13) \quad a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) \equiv (a_1 + a_2) f(x) - a_1 g_1(x) - a_2 g_2(x) = 0$$

alle im endlichen Gebiete T_{m+1} (aus dessen Randpunkten der Bereich T unter dem Winkel $\frac{\pi}{m+1}$ erscheint).[3])

Sind

$$F_i(x) = A_i (x - \alpha_{i1})(x - \alpha_{i2}) \ldots (x - \alpha_{in}) \text{ und } F_i^{(k)}(x) = \frac{d^k F_i(x)}{d x^k} \; (i = 1, 2),$$

so ist

$$\frac{F_i^{(k)}(x)}{F_i(x)} = k \sum \frac{1}{(x - \alpha_{i1})(x - \alpha_{i2}) \ldots (x - \alpha_{ik})},$$

wo die Summation für alle k-ten Kombinationen der Wurzeln $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ zu erstrecken ist.

Daraus folgt, dass die Gleichung

$$a_2 \frac{F_1^{(m+1)}(x)}{F_1(x)} + a_1 \frac{F_2^{(m+1)}(x)}{F_2(x)} \equiv a_2 \frac{f_1^{(m+1)}(x)}{F_1(x)} + a_1 \frac{f^{(m+1)}(x)}{F_2(x)} \equiv$$

$$\equiv \frac{a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x)}{F_1(x) F_2(x)} f^{(m+1)}(x) = 0$$

---

[2]) Archiv d. Math. u. Phys., Bd. 25 (1917), S. 196, Aufgabe Nr. 526. Der Satz wurde von *M. Fekete* im Jahresberichte d. DMV., Bd. 31 (1922), 2. Abt., S. 42 bewiesen.

[3]) Diese Verallgemeinerung, welche auch den (von uns in 1918 bewiesenen) Satz I für $s = 2$ in sich enthält, wurde neulich (im Falle $a_1 + a_2 = 1$) durch *M. Fekete* im Jahresberichte d. DMV., Bd. 31 (1922), 2. Abt., S. 66 als Aufgabe gestellt. Eine andere Verallgemeinerung des Satzes von *Jentzsch* wurde von *A. Cohn* bewiesen, Math. Zeitschr. Bd. 14 (1922), S. 138—140.

sich in der Form (2) darstellen lässt, wo die Nennerfunktionen $(m+1)$-ten Grades sind und ihre Nullstellen mit denjenigen der Funktionen $F_1(x)$ oder $F_2(x)$ übereinstimmen. Damit ist der Satz XI auf Grund des Satzes I bewiesen.

Man könnte leicht auf Grund von Satz V für die Lage der Wurzeln der Gleichung (13) einen entsprechenden Satz aufstellen, wo Kreispaare $K^{2(m+1)}$ die Rolle der Kreispaare K^{2n} übernehmen

Eine Verallgemeinerung von MOIVREs Problem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

§ 1. *Von n Urnen befinden sich in der ersten die Zahlen*

$$0, 1, 2, \ldots, s_1 - 1,$$

in der zweiten die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, s_2 - 1,$$

u. s. f.; aus jeder Urne zieht man je eine Zahl x. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogenen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine erzielte Summe k ergeben? (Im Falle $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = s$ ist dies die LAPLACEsche Fassung von MOIVREs Problem.[1]))

Die Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Quotienten

$$\frac{\left\{s_1, s_2, \ldots, s_n\right\}_k}{s_1 s_2 \ldots s_n},$$

dessen Zähler die Anzahl derjenigen Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \tag{1}$$

bedeutet, in denen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rationale ganze Zahlen sind und die Ungleichungen

$$0 \leqq x_i < s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen.

Im Folgenden soll die Anzahl dieser Lösungen als ein Aggregat von Binomialkoeffizienten dargestellt werden, wie dies für den Fall $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = s$ bereits MONTMORT[2]) gelungen ist.

[1]) Vgl. E. CZUBER, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Encyklopädie der math. Wiss. I 2, insbesondere S. 746—748.

[2]) [R. DE MONTMORT,] Essay d'analyse sur les jeux de hazard, II. Aufl., Paris (1714), S. 46—50.

Die Formel hat MONTMORT bereits in seinem Briefe vom 15. Nov. 1710 NIKOLAUS BERNOULLI mitgeteilt (abgedruckt im genannten Werke, S. 303—307). Auf diesen Brief machte mich Herr K. JORDAN aufmerksam.

§ 2. Statt (1) gehen wir von der allgemeineren Diophantischen Gleichung

$$(2)\qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = k$$

aus, in der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegebene positive ganze Zahlen sind. Die Anzahl derjenigen Lösungen, in denen die rationalen ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Ungleichungen

$$0 \leqq x_i < s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen, bezeichnen wir durch

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k.$$

Hier können und wollen wir auch die Fälle

$$k < 0 \text{ resp. } k > a_1(s_1 - 1) + \ldots + a_n(s_n - 1)$$

zulassen, in denen die Anzahl der Lösungen gleich Null ist.

Wird für irgend ein s_i eine grössere Zahl s_i' gesetzt, so kommen zu den früheren Lösungen von (2) noch diejenigen Lösungen, in denen

$$s_i \leqq x_i < s_i'$$

und

$$0 \leqq x_j < s_j \qquad (j \gtrless i)$$

ist. Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl derjenigen Lösungen von $a_1 x_1 + \ldots + a_{i-1} x_{i-1} + a_i y + a_{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_n x_n = k - a_i s_i$, in denen $0 \leqq y = x_i - s_i < s_i' - s_i$ ist und die Werte der übrigen Unbekannten zwischen die früheren Grenzen fallen.

Demnach ist

$$(3)\qquad \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i' - s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_{k - a_i s_i}$$

Insbesondere erhalten wir

$$(4)\qquad \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k,$$

wenn

$$a_i s_i' \geqq a_i s_i > k.$$

Bezeichnet man mit w_i eine Zahl, die grösser ist als $\frac{k}{a_i}$, so kann zufolge (4) bei der Berechnung der Differenz

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, w_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k$$

w durch $w+s_i$ ersetzt werden. Man erhält dann zufolge (3) für jene Differenz den Wert

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_{k-a_i s_i}$$

Es ist also

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, w_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k -$$

$$- \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, w_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_{k-a_i s_i}$$

§ 3. Befriedigen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die Ungleichungen

$$a_1 w_1 > k,\ a_2 w_2 > k,\ \ldots,\ a_n w_n > k,$$

so ist zufolge (4)

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k$$

nur von $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ und k abhängig. Ich bezeichne diese Zahl (bei konstanten a) durch $[k]$.

Nun ist nach (5)

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ s_1, w_2, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k = [k] - [k - a_1 s_1].$$

Ferner ist wieder nach (5) die Zahl

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \\ s_1, s_2, w_3, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k$$

gleich der Differenz der Zahlen

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \\ s_1, w_2, w_3, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k = [k] - [k - a_1 s_1]$$

und

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \\ s_1, w_2, w_3, \ldots, w_n \end{bmatrix}_{k-a_2 s_2} = [k - a_2 s_2] - [k - a_1 s_1 - a_2 s_2],$$

also gleich

$$[k] - [k - a_1 s_1] - [k - a_2 s_2] + [k - a_1 s_1 - a_2 s_2].$$

Überhaupt ist

$$(6) \qquad \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, w_{i+1}, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k =$$

$$= \sum (-1)^m [k - a_{j_1} s_{j_1} - a_{j_2} s_{j_2} - \ldots - a_{j_m} s_{j_m}]$$

wo für $j_1, j_2, \ldots, j_m$ sämtliche 2^i Kombinationen (von der nullten bis zur i-ten Klasse der Zahlen $1, 2, \ldots, i$) zu setzen sind.

Gilt nämlich diese Gleichheit für irgend ein i, so erhält man für $i+1$ eine ähnliche Gleichung, indem man nach (5)

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k$$

gleich

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, w_{i+1}, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, w_{i+1}, \ldots, w_n \end{bmatrix}_{k-a_{i+1}s_{i+1}}$$

setzt, und dann auf beide Glieder dieser Differenz die für i richtige Gleichung (6) anwendet.

Insbesondere ist

$$(7) \quad \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k = \sum (-1)^m \, [k - a_{j_1}s_{j_1} - a_{j_2}s_{j_2} - \ldots - a_{j_m}s_{j_m}],$$

wo für $j_1, j_2, \ldots, j_m$ sämtliche 2^i Kombinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu setzen sind.

§ 4. Im Falle $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ und $k \geqq 0$, erhält man $[k]$ wohl am einfachsten in der folgenden bekannten[3]) Weise.

Befriedigen die nicht negativen ganzen Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

die Gleichung (1) und somit die Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

die Ungleichheit

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leqq k,$$

so bilden

$$x_1, \; x_1 + x_2, \; x_1 + x_2 + x_3, \; \ldots, \; x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$$

eine Kombination $(n-1)$-ter Klasse der Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, k$$

mit Wiederholung; die Elemente der Kombination erscheinen dabei ihrer Grösse nach geordnet. Wählt man die x auf jede zugelassene Weise, so erhält man alle Kombinationen von je $n-1$ der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, k$ mit Wiederholung und jede nur einmal. Es ist demnach $[k]$ gleich der Anzahl

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

dieser Kombinationen.

---

[3]) H. F. SCHERK, Lehrsätze über den Zusammenhang von Combinationen und Variationen und jener unter einander, *Crelle* Journal, Bd. 3. (1828) S. 96—97.

Für $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ geht also (7) in

$$(8) \quad \left\{s_1, s_2, \ldots, s_n\right\}_k = \sum{}' (-1)^m \binom{n + k - s_{j_1} - s_{j_2} - \ldots - s_{j_m} - 1}{n - 1}$$

über, wo der Akzent neben dem Summationszeichen auf das Fehlen derjenigen Glieder hinweist, in denen

$$s_{j_1} + s_{j_2} + \ldots + s_{j_m} > k$$

ist.[4])

Setzt man $s_1 = \ldots = s_n = s$ und zieht die gleichen Glieder zusammen, so erhält man auf der rechten Seite die MONTMORTsche Summe

$$\sum_{m=0}^{n}{}' (-1)^m \binom{n}{m} \binom{n + k - ms - 1}{n - 1}.$$

---

[4]) Diese Bemerkung ist besonders für diejenigen Glieder von Bedeutung, in denen

$$s_{j_1} + s_{j_2} + \ldots + s_{j_m} > n + k - 1;$$

denn für negative x ist

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

von Null verschieden.

On the Montmort-Moivre Problem.

By CHARLES JORDAN, Budapest.

A few years ago I considered with *R. Fiedler* the same generalisation of the *Montmort—Moivre* Problem as is presented in Professor *Kürschák*'s preceding paper[1]; but as we used other methods, our results were expressed differently, namely, by definite integrals and sums. In putting them equal to the results of the foregoing paper, the obtained formulae might present some interest. To make the comparison easier, let us adopt the same designations as are used therein.

Being given n urns, the first of which contains the numbers $0, 1, 2, \dots s_1-1$, the second $0, 1, 2, \dots s_2-1$, and so on, the n-th containing $0, 1, 2, \dots s_n - 1$. A number x is drawn from each urn; required the probability that the drawn numbers $x_1, x_2, \dots x_n$ satisfy the equation:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots a_n x_n = k,$$

where $a_1, a_2, \dots a_n$ are given integers.

The total number of the possible cases is obviously equal to $s_1 s_2 \dots s_n$. To determine the number F of the favourable cases let us start first from the discontinuous factor

$$\psi_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos (X-k)\, 2\varphi \,.\, d\varphi$$

If X is an integer different from k, the factor ψ_1 is equal to zero; if $X=k$, then we have $\psi_1 = 1$. Accordingly F is obtained by putting $X = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots a_n x_n$ and by taking the sum for every positive value of the variables x_i. Hence,

[1] Acta Litterarum ac Scientiarum, Tom. I. p. 139—143.

$$F = \sum_{x_1=0}^{s_1} \sum_{x_2=0}^{s_2} \dots \sum_{x_n=0}^{s_n} \psi_1 \quad {}^{2)}$$

Let us remark that $\cos (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - k) 2\varphi$ is the real part of

$$e^{-2i\varphi k} \prod_{\nu=1}^{n+1} e^{2i\varphi a_\nu s_\nu}$$

and that

$$\sum_{x_\nu=0}^{s_\nu} e^{2i\varphi a_\nu x_\nu} = \frac{e^{2i\varphi a_\nu s_\nu} - 1}{e^{2i\varphi a_\nu} - 1} = e^{i\varphi (a_\nu s_\nu - a_\nu)} \frac{\sin a_\nu s_\nu \varphi}{\sin a_\nu \varphi}$$

Therefore F is the real part of

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} e^{i\varphi (\Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu - 2k)} \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin a_\nu s_\nu \varphi}{\sin a_\nu \varphi} d\varphi$$

so that F will be equal to

$$(1) \quad F = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos (\Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu - 2k) \varphi \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin a_\nu s_\nu \varphi}{\sin a_\nu \varphi} d\varphi$$

Some of the properties of these numbers can be deduced from the preceding formula; e. g., if we consider F as a function of k, it follows that F is a symmetrical function; indeed we have

$$F(k) = F(\Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu - k) \quad ;$$

This symmetry is relative to $k_0 = {}^1/_2 \Sigma a_\nu s_\nu - {}^1/_2 \Sigma a_\nu$; if k_0 is an integer we have:

$$F({}^1/_2 \Sigma a_\nu s_\nu - {}^1/_2 \Sigma a_\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin \varphi a_\nu s_\nu}{\sin \varphi a_\nu} d\varphi$$

If k_0 is not an integer, we have two consecutive values of F, which are equal:

$$F(k_0 - {}^1/_2) = F(k_0 + {}^1/_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos . \varphi \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin \varphi a_\nu s_\nu}{\sin \varphi a_\nu} d\varphi$$

From the circumstances of the problem it results, that if we put $k < 0$ or $k > \Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu$ then we shall have $F = 0$ More-

[2]) In this paper, as in the Calculus of Finite Differences, we will understand by $\sum\limits_{x=1}^{n} f(x)$ the sum $f(1) + f(2) + \dots f(n-1)$; i. e., the upper limit is not included. The same remark applies to the product.

over it follows that $F(0) = F(\Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu) = 1$. And if we have for every value of μ, $k < a_\mu s_\mu$ or $k > \Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu - a_\mu s_\mu$ then the number F will be independent of the numbers $s_1, s_2, \ldots s_n$; and formula (1) will be the expression of Professor Kürschák's number: $[k]$ This latter is the coefficient of x^k in the expansion of:

$$\prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{1}{1-x^{a_\nu}}$$

Therefore, putting the quantity $\omega = c \prod\limits_{\nu=1}^{n+1} a_\nu > k$ into (1) for every $a_\nu s_\nu$, the value of the latter will not change, and it results

$$F = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos(n\omega - \Sigma a_\nu - 2k)\varphi \sin^n \omega\varphi \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{d\varphi}{\sin a_\nu \varphi}$$

If instead of ψ_1 we start from the discontinuous factor

$$\psi_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos 2X\varphi \cos 2k\varphi \, d\varphi \qquad \text{or from}$$

$$\psi_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \sin 2X\varphi \sin 2k\varphi \, d\varphi$$

we obtain in the same manner:

$$(2) \quad F = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos 2k\varphi \cos(\Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu)\varphi \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin a_\nu s_\nu \varphi}{\sin a_\nu \varphi} d\varphi$$

and

$$(3) \quad F = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \sin k\varphi \sin(\Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu)\varphi \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin a_\nu s_\nu \varphi}{\sin a_\nu \varphi} d\varphi$$

Moreover, instead of using discontinuous integrals we may employ the following discontinuous sums

$$\chi_1 = \frac{1}{p} \sum_{\mu=0}^{p} \cos \frac{2\pi\mu(X-k)}{p} \qquad \text{or}$$

$$\chi_2 = \frac{2}{p} \sum_{\mu=0}^{p} \cos \frac{2\pi\mu k}{p} \cos \frac{2\pi\mu X}{p} \qquad \text{or}$$

$$\chi_3 = \frac{2}{p} \sum_{\mu=0}^{p} \sin \frac{2\pi\mu k}{p} \sin \frac{2\pi\mu X}{p}$$

p being an odd integer greater than every value of $X+k$; if X is a positive integer different from k, then $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$; if on the contrary X is equal to k, then $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 1$.

The same method as before conducts to the following results:

$$\text{(4)} \qquad F = \frac{1}{p} \sum_{\mu=0}^{p} \cos\left(\Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu - 2k\right)\frac{\pi\mu}{p} \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin a_\nu s_\nu \frac{\pi\mu}{p}}{\sin a_\nu \frac{\pi\mu}{p}}$$

$$\text{(5)} \qquad F = \frac{2}{p} \sum_{\mu=0}^{p} \cos 2k \frac{\pi\mu}{p} \cos\left(\Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu\right)\frac{\pi\mu}{p} \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin a_\nu s_\nu \frac{\pi\mu}{p}}{\sin a_\nu \frac{\pi\mu}{p}}$$

$$\text{(6)} \qquad F = \frac{2}{p} \sum_{\mu=0}^{p} \sin 2k \frac{\pi\mu}{p} \sin\left(\Sigma a_\nu s_\nu - \Sigma a_\nu\right)\frac{\pi\mu}{p} \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin a_\nu s_\nu \frac{\pi\mu}{p}}{\sin a_\nu \frac{\pi\mu}{p}}$$

The quantity F as given by (1), (2), (3), ... (6) is equal to the expression (7) of the preceding paper.

Let us now consider the particular case in which $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. Putting F equal to the result found by *Kürschák* we have according to (1)

$$\text{(7)} \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos\left(\Sigma s_\nu - n - 2k\right)\varphi \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin s_\nu \varphi}{\sin \varphi}\, d\varphi =$$

$$= \sum_{m=0} (-1)^m \binom{n+k-1-s_{\alpha_1}-\ldots-s_{\alpha_m}}{n-1}$$

In this formula every combination of the m-th order of the numbers $1, 2, \ldots n$ must be taken for $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$; omitting the terms in which $s_{\alpha_1} + s_{\alpha_1} + \ldots + s_{\alpha_m} > k$.

Starting from our formulae (2), ... (6) we get equalities similar to (7); the right side remaining the same. Hence the obtained formulae may be considered as the solutions of the foregoing definite integrals and sums.

Über Faktorenfolgen, welche die „Klasse“ einer Fourierschen Reihe unverändert lassen.

Von MICHAEL FEKETE in Budapest.

§ 1.

Einleitende Erklärungen. Fragestellungen und Übersicht der Lösungen.

1. Aus der Gesamtheit aller, für jedes reelle x erklärten, nach 2π periodischen Funktionen $f(x)$ seien herausgegriffen und je zu einer Klasse zusammengefasst

erstens sämtliche Funktionen, die über das Intervall $(0, 2\pi)$ in *Lebesgue*schem Sinne[1] integrierbar (Klasse C_1),

zweitens sämtliche Funktionen der Klasse C_1, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkt (Klasse C_2),

drittens sämtliche Funktionen, die für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ beschränkt und von 0 bis 2π in *Riemann*schem Sinne[2] integrierbar (Klasse C_3),

viertens sämtliche Funktionen, die für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetig (Klasse C_4),

fünftens sämtliche Funktionen, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ von beschränkter Schwankung sind (Klasse C_5),

sechstens sämtliche Funktionen, die sich für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ als bestimmte Integrale (von 0 bis x) einer im *L.*-Sinne integrierbaren Funktion darstellen lassen (Klasse C_6).

2. Sei

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots$$

eine unendliche trigonometrische Reihe. Wir sagen, sie gehört zur Klasse K_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 6$), falls in der oben erklärten Funktionsklasse C_ν eine Funktion $f(x)$ vorhanden ist, deren *Fourier*sche

[1] Kurz: im *L.*-Sinne.

[2] Kurz: im *R.*-Sinne.

Konstanten $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt,\ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$ mit den Koeffizienten a_n, b_n von (1) übereinstimmen.

Die Hauptfrage, mit welcher wir uns im vorliegenden Aufsatze beschäftigen wollen, lautet wie folgt:

A. *Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Faktorenfolge*

(2) $$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

komponiert mit den Gliedern einer Reihe (1) *der Klasse* K_ν, *diese in eine Reihe*

(3) $$\frac{\lambda_0 a_0}{2} + \lambda_1(a_1\cos x + b_1 \sin x) + \ldots + \lambda_n(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

überführe, welche wiederum zur Klasse K_ν *gehört?*

3. Dieser Frage nach der Charakteristik der *„Faktoren der Klasseninvarianz"* wollen wir noch eine analoge Frage betreffend die *„Faktoren der Klassenkovarianz"* zur Seite stellen. Diese kann — wenn wir die zu (1) konjugierte trigonometrische Reihe

($\overline{1}$) $$b_1 \cos x - a_1 \sin x + \ldots + b_n \cos nx - a_n \sin nx + \ldots$$

als zur Klasse $\overline{K}_\nu$ gehörig betrachten, falls (1) eine *Fourier*sche Reihe[3]) aus der Klasse K_ν bedeutet — folgendermassen formuliert werden:

B. *Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Faktorenfolge*

(4) $$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots,$$

komponiert mit den Gliedern einer Reihe ($\overline{1}$) *der Klasse* $\overline{K}_\nu$, *diese in eine Reihe*

(5) $$\mu_1(b_1 \cos x - a_1 \sin x) + \ldots + \mu_n(b_n \cos nx - a_n \sin nx) + \ldots$$

überführe, welche zur Klasse K_ν *gehört?*

4. Die Lösung dieser Frage, wie die der vorigen, gründen wir auf die Lösung des folgenden dritten, auch an und für sich wichtigen Problems:

C. *Es sollen notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, dass die Reihe* (1) *einer bestimmten der Klassen* K_ν *angehöre.*

---

[3]) Kurz *F.*-Reihe.

Das älteste Resultat in dieser Richtung ist den Herren *F. Riesz*[4]) und *E. Fischer*[5]) zu verdanken, die eine notwendige und hinreichende Bedingung entdeckt haben, unter welcher (1) die *F.*-Reihe einer (samt ihrem Quadrate) im *L.*-Sinne integrierbaren Funktion ist. Ihr diesbezüglicher Satz ist für uns um so bedeutungsvoller, da er zu einer Basis unserer Schlüsse bei Erledigung der letztgenannten Aufgabe diente[6]).

Die obigen zwei Fragestellungen A. und B. sind hingegen auf Herrn *W. H. Young* zurückzuführen, der selbst für die meisten der von uns betrachteten Reihenklassen solche hinreichende Bedingungen für die Faktoren der Klasseninvarianz, bzw. der Klassenkovarianz angegeben hat[7]), welche sich nach unseren Ergebnissen zugleich als notwendige erweisen werden. Ihm ist auch eine Lösung unseres dritten Problems C. für die Klassen K_2 und K_5 zu verdanken[8]) und zwar eine solche, durch welche für uns ein neuer, von dem seinigen verschiedener Weg zur Herleitung seiner obenerwähnten hinreichenden Bedingungen geöffnet wurde. Betreffs Einzelheiten sei auf das später Folgende hingewiesen.

Hier sei hervorgehoben, dass wir die *Young*schen Kriterien für das Angehören der trigonometrischen Reihe (1) zur Klasse K_2 und K_5 durch eine neue Methode gewinnen, die uns auch im Falle der Klassen K_3 und K_4 zum Ziele hilft.

5. So gelangen wir — nach den Erklärungen und Hilfssätzen des § 2 — im dritten Paragraphen zum folgenden Resultate:

---

[4]) *F. Riesz*, Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, Paris C. R. 18 mars 1907; Über orthogonale Funktionensysteme, Göttinger Nachrichten 1907, S. 116–122.

[5]) *E. Fischer*, Sur la convergence en moyenne, C. R. 13. mai 1907.

[6]) Derselbe Satz verhalf Herrn *Steinhaus* zur Bestimmung der Faktoren der Klasseninvarianz für die Klasse der *F.*-Reihen der samt ihren Quadraten in *L.*-Sinne integrierbaren Funktionen. Siehe: *H. Steinhaus*, Additive und stetige Funktionaloperationen, Math. Zeitschrift 5 (1919), S. 186—221; Satz 8. S. 213—214.

[7]) *W. H. Young*, On Fourier Series and Fonctions of Bounded Variation, Lond. Roy. Soc. Proc 88, (1913), S. 561—568

[8]) *W. H Young*, On a Condition that a Trigonometrical Series should have a Certain Form, Lond. Roy. Soc. Proc. 88 (1913), S. 569—574 Betreffs anderer Lösung des Problems für die Klasse K_5 vgl. *F. Riesz*, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, Ann. Éc. Norm. Sup. 28 (1911) S. 33—62.

Damit die trigonometrische Reihe (1) *der Klasse* K_ν ($\nu = 2$, 3, 4, 5) *angehören soll, ist notwendig und hinreichend, dass die Folge ihrer arithmetischen Mittel* $S_n(x) = \dfrac{s_0(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1}$ — wobei $s_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ — *dieselbe Eigenschaft* (Beschränktheit, bzw. Integrierbarkeit im *R*.-Sinne, Stetigkeit, Beschränktheit i. B. auf die Schwankung) *„in gleichem Masse" aufweisen soll, welche die Funktionsklasse* C_ν *charakterisiert.* (Vgl. Sätze I—IV).

Auf Grund dieses Ergebnisses — jedoch im Falle der Klassen K_1 und K_6[9]) noch durch Hinzuziehung eines *Steinhaus*schen Satzes[10]) — erhalten wir im § 4., als Beantwortung unserer Hauptfrage:

Damit die Reihe (3) *mit* (1) *zugleich zur Klasse* K_ν ($\nu = 1$, 2, ..., 6) *gehöre, ist notwendig und hinreichend, dass die Sinusreihe* $\sum_1^\infty \dfrac{\lambda_n \sin nx}{n}$ *zur Klasse* K_6 (Klasse der F.-Reihen der Funktionen von beschränkter Schwankung) *gehöre.* (Vgl. die Sätze V., VI., VII.)

Durch nochmalige Anwendung der Resultate des dritten Paragraphen ergibt sich zuletzt im § 5. als Lösung der Frage betreffend die Faktoren der Klassenkovarianz der Satz:

Damit die Reihe (5) *mit* (1) *zugleich zur Klasse* K_2 *bzw.* K_3, K_4, K_5 *gehöre, ist notwendig und hinreichend, dass die Cosinusreihe* $\sum_1^\infty \dfrac{\mu_n \cos nx}{n}$ *zur Klasse* K_5 *gehöre.* (Satz VIII.)

§ 2.

Erklärungen und Hilfssätze.

1. Im vorliegenden Paragraphen werden wir zunächst einige Erklärungen von Begriffen angeben, mit deren Hilfe unsere Resultate sich in einfacherer und einheitlicherer Form aussprechen lassen. Sodann wird der Inhalt der von uns definierten Begriffe analysiert. So gelangen wir zu Hilfssätzen, durch welche die gemeinschaftliche Grundlage zur Erledigung der eingangs aufgeworfenen dreierlei Probleme geschaffen wird.

---

9) Die Notwendigkeit der unten folgenden *Young*schen hinreichenden Bedingung für die Faktoren der Klasseninvarianz der Klasse K_1 hat neuerdings Herr *S. Sidon direkt* ermittelt. (Vgl. *S. Sidon,* Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der *Fourier*schen Reihen, Math. Zeitschrift, 10 (1921), S. 121—127.)

10) Vgl. a. a. O. 6), Satz 6. S. 212—13

2. Es sei $f(x)$ eine für jedes x erklärte, nach 2π periodische Funktion der reellen Veränderlichen x. Wir sagen:

1° $f(x)$ heisse eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkte, bzw. im Wesen beschränkte Funktion, wenn sie im Intervalle $(0, 2\pi)$ die *Bedingung (B) der Beschränktheit* überall, bzw. fast überall erfüllt, d. h. wenn es eine positive Konstante G gibt, so dass

$$(6) \qquad |f(\alpha)| \leqq G,$$

falls α ein beliebiger Wert aus $(0, 2\pi)$ ist, bzw. zu einer bestimmten Teilmenge vom Masse 2π der Punktmenge $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gehört.

2° $f(x)$ heisse eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ nach *Riemann* integrierbare, bzw. im Wesen integrierbare Funktion, wenn sie in diesem Intervalle die *Bedingung (I) der Integrierbarkeit im R.-Sinne* überall, bzw. fast überall erfüllt, d. h. wenn zu jedem pos. ε ein $\delta > 0$ zu finden ist derart, dass

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{s} |f(\alpha_k) - f(\beta_k)| (x_k - x_{k-1}) \leqq \varepsilon,$$

falls für die x_k die Beziehungen

$$(7^a) \qquad 0 \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_s \leqq 2\pi$$

$$(7^b) \qquad \mathrm{Max}\,\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1, \ldots, x_s - x_{s-1}\} \leqq \delta = \delta(\varepsilon)$$

bestehen, die α_k, β_k jedoch den Beziehungen

$$(7^c) \qquad x_{k-1} \leqq \alpha_k < \beta_k \leqq x_k$$

genügende, sonst beliebige Zahlen des Intervalls $(0, 2\pi)$, bzw. einer massgleichen Teilmenge $M_{2\pi}$ desselben sind.[11])

3° $f(x)$ heisse eine, im Intervalle $(0, 2\pi)$ stetige bzw. im Wesen stetige Funktion, wenn sie daselbst die *Bedingung (S) der Stetigkeit* überall, bzw. fast überall erfüllt, d. h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$(8) \qquad |f(\beta) - f(\alpha)| \leqq \varepsilon, \quad (\beta > \alpha)$$

falls α, β solches Wertepaar aus dem Intervalle $(0, 2\pi)$ bzw. aus einer massgleichen Teilmenge $M_{2\pi}$ dieses Intervalls ist, für welches

$$(8^a) \qquad |\beta - \alpha| \leqq \delta, \text{ oder } |\beta - \alpha + 2\pi| < \delta$$

besteht.

4° $f(x)$ heisse eine, im Intervalle $(0, 2\pi)$ i. B. auf die Schwankung beschränkte, bzw. im Wesen beschränkte Funktion, falls sie im Intervalle $(0, 2\pi)$ die *Bedingung (BS) der Beschränktheit i. B. auf die Schwankung* überall, bzw. fast überall erfüllt, d. h. wenn eine Konstante $H > 0$ existiert, so dass

---

[11]) Erfüllt $f(x)$ die Bedingung (I), so ist sie beschränkt.

$$(9) \qquad \sum_{k=1}^{s} |f(\alpha_{k-1}) - f(\alpha_k)| \leqq H,$$

falls die α_k den Bedingungen

$$(9^a) \qquad \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \ldots < \alpha_s$$

genügende Zahlen des Intervalls $(0, 2\pi)$ oder einer massgleichen Teilmenge $M_{2\pi}$ desselben bedeutet.

3. Hilfssatz I. *Erfülle die Funktion $f(x)$ die Bedingung (B), bzw. (I), (S), (BS) im Intervalle $(0, 2\pi)$ fast überall. Dann existiert eine ihr aequivalente*[12]) *Funktion $f^*(x)$, welche dieselbe Bedingung in $(0, 2\pi)$ überall erfüllt*

Beweis. Sei $M_{2\pi}$ die Menge aller Punkte des Intervalls $(0, 2\pi)$, in welchen die Funktion $f(x)$ die Ungleichung (6), bzw. (7), (8), (9) erfüllende Werte annimmt, falls die Funktionenargumente (7^c), bzw. (8^a), (9^a) befriedigen; die Menge der übrigen Punkte von $(0, 2\pi)$ heisse M_0. Wir definieren eine Funktion $f^*(x)$ auf die folgende Weise:

1) ist x ein Punkt aus $M_{2\pi}$, so bestehe $f^*(x) = f(x)$;

2) ist x ein Punkt aus M_0, so sei $f^*(x) = \limsup\limits_{\nu \to \infty} f(t_\nu)$,

wobei $t_1, t_2, \ldots, t_\nu, \ldots$ irgendeine bestimmte Folge aus Punkten von $M_{2\pi}$ bedeutet, welche bei unendlich wachsendem ν gegen x konvergiert. Dann besitzt $f^*(x)$ die gewünschten Eigenschaften. Denn sind die in der Ungleichung (6), bzw. (7), (8), (9) auftretenden Punkte α, bzw. α_k, β_k; α, β; α_k sämtlich Punkte aus $M_{2\pi}$, so besteht diese Ungleichung für $f^*(x)$ nach 1); kommen aber unter diesen Punkten auch Punkte aus M_0 vor, so folgt das Bestehen der fraglichen Ungleichung nach 2); denn in einem derartigen Punkte x hat $f^*(x)$ einen solchen Wert, welcher als Limes von Werten dieser Funktion in Punkten aus $M_{2\pi}$ betrachtet werden kann.

4. Es sei

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

eine unendliche Folge, deren Glieder für jedes x erklärte, nach 2π periodische Funktionen des reellen Veränderlichen x sind. Wir erklären: die Folge heisse eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ gleichmässig beschränkte, bzw. gleichmässig integrierbare, gleichmässig stetige, i. B. auf die Schwankung gleichmässig beschränkte Folge, wenn die Funktionen $f_n(x)$ die Bedingung *(B)*, bzw. *(I)*, *(S)*, *(BS)* in

---

[12]) D. h. eine Funktion, welche mit $f(x)$ mit eventueller Ausnahme von Punkten einer Menge vom Masse 0 übereinstimmt.

gleichem Masse erfüllen, d. h. wenn die in der Ungleichung (6), bzw. (7), (8), (9) rechts auftretende Grösse sich von n unabhängig auffinden lässt.

5. Hilfssatz II. *Erfüllen die trigonometrischen Polynome $P_n(x)$ mit dem gemeinsamen konstanten Gliede $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n(t)\,dt$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung (I), bzw. (S), bzw. (BS) in gleichem Masse, so erfüllen sie daselbst auch die Bedingung (B) in gleichem Masse.*

In der Tat, befriedigen die $P_n(x)$ voraussetzungsgemäss eine der genannten drei Bedingungen, so existiert leichtersichtlich eine Grösse $G>0$ derart, dass für jedes $x>0$, $<2\pi$ und für jedes n

$$|P_n(0)-P_n(x)|\leqq G \tag{10}$$

besteht. Doch folgt aus der Identität

$$P_n(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(P_n(0)-P_n(t))\,dt$$

für jedes n die Beziehung

$$|P_n(0)|\leqq\left|\frac{a_0}{2}\right|+G,$$

also gilt nach (10) für jedes x und jedes n

$$|P_n(x)|\leqq\frac{|a_0|}{2}+2G. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

6. Hilfssatz III. *Sei $f(x)$ eine für jedes x erklärte, nach 2π periodische Funktion der reellen Veränderlichen x, welche über das Intervall $(0, 2\pi)$ mindestens im L.-Sinne integrierbar ist. Ferner sei $\{P_n(x)\}$ eine Folge trigonometrischer Polynome, für welche die numerische Folge*

$$\int\limits_0^{2\pi}|P_1(t)|\,dt,\quad \int\limits_0^{2\pi}|P_2(t)|\,dt,\ldots,\quad \int\limits_0^{2\pi}|P_n(t)|\,dt,\ldots \tag{11}$$

beschränkt ist. Man bilde die neue Folge trigonometrischer Polynome $\{Q_n(x)\}$, definiert durch die Gleichung

$$Q_n(x)=\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot P_n(t-x)\,dt,$$

oder aber — was wegen der Periodizität der Funktionen $f(x)$, $P_n(x)$ auf dasselbe hinausläuft — durch die Gleichung

$$Q_n(x) = \int_0^{2\pi} f(t+x)\, P_n(t)\, dt. \tag{12}$$

Erfüllt die Funktion $f(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung (B), bzw. (I), (S), (BS) überall, so erfüllen daselbst die $Q_n(x)$ dieselbe Bedingung in gleichem Masse.

Beweis. Sei $f(x)$ zunächst eine, im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkte Funktion. Dann gibt es — wegen der Periodizität von $f(x)$ — ein positives G, so dass $|f(t+x)| \leqq G$, wenn $0 \leqq t \leqq 2\pi$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Diese Beziehung, vereint mit der Definitionsgleichung (12) ergibt unmittelbar, dass für jedes ganze n und für jedes $x \geqq 0$, $\leqq 2\pi$

$$|Q_n(x)| \leqq G \int_0^{2\pi} |P_n(t)|\, dt \leqq G\, I$$

ist, wobei I' eine obere Schranke der Folge (11) bedeutet. Dann bilden aber die $Q_n(x)$ eine für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gleichmässig beschränkte Folge. W. z. b. w.

Zweitens erfülle $f(x)$ die Bedingung *(I)* im Intervalle $(0, 2\pi)$. Dann gibt es — wegen der Periodizität von $f(x)$ — leichtersichtlich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von t unabhängiges $\delta > 0$, so dass — wie auch t gewählt sei — die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{s} |f(t+\alpha_k) - f(t+\beta_k)|\, [(t+x_k) - (t+x_{k-1})] \leqq \varepsilon \tag{13}$$

besteht, wenn nur die x_k, α_k, β_k die Beziehungen (7ª), (7ᵇ), (7ᶜ) befriedigen. Nun involviert (13), vereint mit (12), das Bestehen der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{s} |Q_n(\alpha_k) - Q_n(\beta_k)|\, (x_k - x_{k-1}) \leqq$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_1^s |f(t+\alpha_k) - f(t+\beta_k)|\, (x_k - x_{k-1}) \right\} |P_n(t)|\, dt \leqq \varepsilon\, I',$$

wie auch n gewählt sei, also befriedigen die $Q_n(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ die Bedingung *(I)* in gleichem Masse. W. z. b. w.

Drittens genüge $f(x)$ der Bedingung *(S)*. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(t+\beta) - f(t+\alpha)| \leqq \varepsilon, \text{ sobald } |\beta - \alpha| \leqq \delta.$$

Doch besteht nach (12)

$$|Q_n(\beta)-Q_n(\alpha)|\leqq\int_0^{2\pi}|f(t+\beta)-f(t+\alpha)|\,|P_n(t)|\,dt,$$

daher gilt — bei beliebiger Wahl des n —

$$|Q_n(\beta)-Q_n(\alpha)|\leqq\varepsilon\Gamma\ , \text{ falls } |\beta-\alpha|\leqq\delta,$$

also erfüllen die $Q_n(x)$ für $0\leqq x\leqq 2\pi$ die Bedingung *(S)* in gleichem Masse. W. z. b. w.

Zuletzt sei $f(x)$ eine nach 2π periodische Funktion, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ von beschränkter Schwankung ist. Dann involvieren die Periodizität von $f(x)$ und die Erfüllung der Bedingung *(BS)* im Intervalle $(0, 2\pi)$ insgesamt die Existenz einer von t unabhängigen Zahl $K>0$ von der Beschaffenheit, dass für jedes $t\geqq 0, \leqq 2\pi$

$$\sum_{k=1}^{s}|f(t+\alpha_{k-1})-f(t+\alpha_k)|\leqq K \tag{14}$$

besteht, wenn nur die α_k den Beziehungen $0\leqq\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_s\leqq 2\pi$ genügen. Nun besteht, zufolge der Definitionsgleichung (12) für iedes System der α_k und für jedes ganzes n die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{s}|Q_n(\alpha_{k-1})-Q_n(\alpha_k)|\leqq\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{s}|f(t+\alpha_{k-1})-f(t+\alpha_k)|\,|P_n(t)|\,dt,$$

also ist nach (14)

$$\sum_{k=1}^{s}|Q_n(\alpha_{k-1})-Q_n(\alpha_k)|\leqq K\Gamma,\quad\text{wenn } 0\leqq\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_s\leqq 2\pi,$$

wie auch n gewählt sei. Dann erfüllen aber die $Q_n(x)$ für $0\leqq x\leqq 2\pi$ die Bedingung *(BS)* in gleichem Masse.[13])

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes III. in allen Stücken dargetan.

7. Als ein Gegenstück des eben bewiesenen Hilfssatzes, gilt der folgende

Hilfssatz IV. *Sei* $\{P_n(x)\}$ *eine Folge trigonometrischer Polynome, für welche die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|P_n(t)|\,dt=\infty$$

gilt. Dann existiert eine für jedes x *erklärte, nach* 2π *periodische, überall stetige Funktion* $\psi(x)$ *derart, dass*

13) Die hier angewandte Schlussweise habe ich durch *F. Lukács* kennen gelernt, der nach seiner mündlichen Mitteilung mit Hilfe derselben den Satz bewies, dass die totale Schwankung der arithmetischen Mittel einer Reihe der Klasse K_b nicht grösser sein kann, als die der Funktion.

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_0^{2\pi} \psi(t)\, P_n(t)\, dt \right| = \infty$$

wird.[14])

§ 3.

Über die Bedingungen, unter welchen eine trigonometrische Reihe zur Klasse K_2, bzw. K_3, K_4, K_6 gehört.

1. Es sei

(15) $$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos n x + b_n \sin n x + \ldots$$

eine trigonometrische Reihe. Die erste Frage, welche uns in diesem Paragraphen beschäftigen wird — ihre völlige Lösung findet sich bereits bei *Young* (A. a. O. [Vgl. [8])] S. 574) — ist die folgende:

Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter welchen (15) zur Klasse K_2 gehört, d. h. die F.-Reihe einer, im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkten, im *L.* Sinne integrierbaren Funktion ist?

Als Beantwortung beweisen wir den

Satz I. *Seien* $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos n x + b_n \sin n x \quad (n = 1, 2, \ldots)$ *die Partialsummen und*

(16) $$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + (a_n \cos n x + b_n \sin n x)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

die arithmetischen Mittel der Reihe (15). *Damit* (15) *zur Klasse K_2 gehöre, ist notwendig und hinreichend, dass die Folge* (16) *im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *gleichmässig beschränkt sei.*

Die Notwendigkeit der eben ausgesprochenen Bedingung folgt aus bekannten Ergebnissen des Herrn *Fejér*. Gehört nämlich (15) zur Klasse K_2, so existiert eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkte, im *L.*-Sinne integrierbare Funktion $f(x)$, so dass

---

[14]) Vgl. *A. Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Dissertation (Göttingen, 1910 50 Seiten.) § 1. S. 9—14. S. auch *H. Lebesgue*. Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier (C. R. de l'acad. des sciences, Paris 1905. II. sem. S. 875—77.)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \;, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \;;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

besteht. Dann haben aber die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ nach *Fejér*s grundlegender Formel die folgende Gestalt:

$$S_n(x) = \int_0^{2\pi} f(t+x)\, C_n(t)\, dt \tag{17}$$

wobei die Cosinuspolynome

$$C_n(x) = \frac{1}{(n+1)\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \cos x \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \cos nx \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi} \left(\frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \right)^2$$

die beiden Beziehungen

$$C_n(t) \geqq 0, \text{ wenn } 0 \leqq t \leqq 2\pi; \int_0^{2\pi} C_n(t)\, dt = 1$$

und folglich auch die dritte:

$$\int_0^{2\pi} |\, C_n(t) \,|\, dt = 1 \tag{18}$$

für jedes n befriedigen. Man kann also auf die Folge (16) den Hilfssatz III anwenden. Danach involviert aber die Beschränktheit von $f(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die gleichmässige Beschränktheit der Folge (16) ebenda, wie es im Satze behauptet wurde.

Umgekehrt, erfüllen die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung der Beschränktheit in gleichem Masse, so muss (15), zur Klasse K_2 gehören. In der Tat, gibt es eine positive Konstante G derart, dass für jedes ganzes n und jedes $x \geqq 0, \leqq 2\pi$ die Ungleichung

$$|\, S_n(x) \,| \leqq G$$

gilt, so besteht auch die Beziehung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_n(t)^2\, dt =$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + (a_1^2 + b_1^2) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \ldots + (a_n^2 + b_n^2) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^2 \leqq 2\, G^2$$

wie auch die positive ganze Zahl n gewählt sei. Dann ist aber

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_1^\infty (a_n^2+b_n^2)$$

offenbar konvergent und deshalb existiert nach dem *Riesz—Fischer*schen Satze eine, im Intervalle $(0, 2\pi)$ (samt ihrem Quadrate) im L.-Sinne integrierbare Funktion $s(x)$, deren F.-Konstanten mit den Koeffizienten von (15) übereinstimmen. Folglich konvergieren nach einem Theorem von *Lebesgue* die arithmetischen Mittel bei unendlich wachsendem n gegen $s(x)$ in Punkten x des Intervalls $(0, 2\pi)$, welche insgesamt eine Menge $M_{2\pi}$ vom Masse 2π ausmachen, also ist die Funktion $s(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ im Wesen beschränkt. Dann gibt es aber nach dem Hilfssatze I. unter den ihr aequivalenten eine Funktion $f(x)$, welche die Bedingung der Beschränktheit im Intervalle $(0, 2\pi)$ überall erfüllt. Diese Funktion $f(x)$ gehört offenbar zur Klasse C_2, ihre F.-Entwicklung stimmt jedoch mit derselben von $s(x)$, d. h. mit der Reihe (15) überein, also gehört (15) zur Klasse K_2. W. z. b. w.

2. Nun stellen und lösen wir, einander parallel, die folgenden 3 Fragen:

Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Reihe (15) 1° zur Klasse K_3, 2° zu K_4, 3° zu K_5 gehöre?

Diese Fragen werden durch die folgenden 3 Sätze beantwortet:

Satz II. *Die Reihe* (15) *bildet dann und nur dann die Fouriersche Entwicklung einer nach* 2π *periodischen, im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *beschränkten und daselbst im R.-Sinne integrierbaren Funktion* $f(x)$, *wenn die Folge* (16) *ihrer arithmetischen Mittel daselbst gleichmässig integrierbar (im R. Sinne) ist.*

Satz III. *Die Reihe* (15) *bildet dann und nur dann die F.-Entwicklung einer nach* 2π *periodischen, für* $0 \leqq x \leqq 2\pi$ *stetigen Funktion* $f(x)$, *wenn die Folge* (16) *im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *gleichmässig stetig ist.*

Satz IV. *Die Reihe* (15) *bildet dann und nur dann die F.-Entwicklung einer nach* 2π *periodischen Funktion* $f(x)$, *die im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *von beschränkter Schwankung is, wenn die Folge* (16) *daselbst i. B. auf die Schwankung gleichmässig beschränkt ist.*[15])

Beweis der Sätze II—IV.

---

[15]) *Young*, a. a. O [Vgl. [8])] S. 572.

Ist (15) die *F.*-Reihe einer Funktion der Klasse C_3, bzw. C_4, C_5, also einer Funktion, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung *(I)*, bzw. *(S)*, *(BS)* überall erfüllt, dann erfüllen daselbst die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ nach Hilfssatz III. — mit Hinsicht auf (17) und (18) — dieselbe Bedingung in gleichem Masse, wie behauptet wurde.

Umgekehrt, erfüllen die $S_n(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung *(I)*, bzw. *(S)*, *(BS)* in gleichem Masse, so muss (29) zur Klasse K_3, bzw. K_4, K_5 gehören.

In der Tat, im ersten, wie auch im zweiten, bzw. dritten genannten Falle erfüllen die fraglichen arithmetischen Mittel nach Hilfssatz II. zugleich die Bedingung der Beschränktheit in gleichem Masse. Daraus kann aber — wie oben — die Existenz einer im *L.*-Sinne integrierbaren Funktion $s(x)$ gefolgert werden, deren *F.*-Reihe mit (15) übereinstimmt und welche die Grenzfunktion der Funktionsfolge (16) in einer massgleichen Teilmenge $M_{2\pi}$ des Intervalls $(0, 2\pi)$ ist. Als solche, erfüllt sie in diesem Intervalle offenbar diejenige Bedingung — d. h. die Bedingung *(I)*, oder *(S)* oder *(BS)* — fast überall, welche die Glieder der Folge (16) daselbst in gleichem Masse erfüllen. Zum völligen Beweise bedenke man noch, dass nach Hilfssatz I. immer eine Funktion $f(x)$ vorhanden ist, welche mit $s(x)$ aequivalent, also ebenfalls die Reihe (15) zur *F.*-Entwicklung hat und welche die Bedingung *(I)*, bzw. *(S)*, *(BS)* in $(0, 2\pi)$ überall erfüllt, falls $s(x)$ dieselbe ebenda fast überall befriedigt.[16])

§ 4.

Über die Faktoren der Klasseninvarianz.

1. In diesem Paragraphen wollen wir unsere Hauptfrage: die Frage nach der Charakteristik der Faktoren der Klasseninvarianz für jede der eingangs erklärten Klassen *Fourier*scher Reihen erledigen. Für alle diese 6 Klassen ist die Bedingung, welcher die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ zu unterwerfen notwendig und hinreichend ist, damit samt (15) auch die Reihe

$$(19) \quad \frac{\lambda_0 a_0}{2} + \lambda_1(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + \lambda_n(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

---

[16]) Herr *F. Riesz* hat mich auf den prinzipiell wichtigen Umstand aufmerksam gemacht, dass der zweite Teil des eben vollendeten Beweises auch ohne Anwendung der Riesz—Fischerschen und Lebesgueschen Sätze, mit völliger Vermeidung des Lebesgueschen Integralbegriffs geführt werden kann.

zu einer und derselben der Klassen $K_1, \ldots, K_6$ gehöre, völlig identisch; jedoch ergibt unsere Beweismethode diese Bedingung unmittelbar nur für die Klassen K_2, K_3, K_4, K_5; für die Klassen K_1 und K_6 erhalten wir sie erst mittelbar, auf Grund eines im § 1. schon angeführten *Steinhaus*schen Satzes.

2 Zunächst behaupten wir:

B_1 Damit die Folge $\{\lambda_n\}$ die Eigenschaft habe, die *F.*-Reihe (15) irgendeiner zur Klasse C_ν ($\nu = 2, 3, 4, 5$) gehörigen Funktion in die *F.*-Reihe (19) einer ebensolchen Funktion zu verwandeln, ist es notwendig, dass die Sinusreihe $\sum\limits_1^\infty \frac{\lambda_n \sin n x}{n}$ die *F.*-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung sei.

Da die Reihe $\sum \frac{\sin n x}{n}$ selbst zur Klasse K_6 gehört, so bedarf die Richtigkeit unserer Behauptung nur im Falle der Klassen K_2, K_3, K_4 eines Beweises. Dieser lässt sich nun so führen:

Gibt die Reihe (19) die *F.*-Entwicklung einer Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π an, so gilt leichtersichtlich für das n-te arithmetische Mittel $T_n(x)$ der Reihe (19) die Darstellung

$$(20) \qquad T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t+x)\, L'_n(t)\, dt + \frac{a_0 \lambda_0}{2}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei $L_n(x)$ das n-te arithmetische Mittel der Reihe

$$(21) \qquad \sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin n x}{n}$$

bedeutet. Denn nach Annahme gelten die Beziehungen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k\alpha\, d\alpha, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha\, d\alpha, \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

daher ist

$$T_n(x) - \frac{a_0 \lambda_0}{2} = \lambda_1 (a_1 \cos x + b_1 \sin x)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots +$$
$$+ \lambda_n (a_n \cos n x + b_n \sin n x)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos k(x-\alpha)\left(1-\frac{k}{n+1}\right)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,L'_n(x-\alpha)\,d\alpha,$$

woraus (20) sich durch die Substitution $\alpha=x+t$ wegen der Periodizität von $f(x)$ und $S_n(x)$ unmittelbar ergibt.

Nun folgt aus (20), dass die Folge $\{\lambda_n\}$ für keine der Klassen K_2, K_3 und K_4 eine Folge der Klasseninvarianz bildet, es sei denn, dass (21) zur Klasse K_5 gehört. Gibt es nämlich keine Funktion von beschränkter Schwankung, deren F.-Entwicklung mit (21) übereinstimmt, so können die arithmetischen Mittel $L_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ nach Satz IV keinesfalls eine solche Folge bilden, welche in $(0,2\pi)$ gleichmässig von beschränkter Schwankung ist. Mit anderen Worten: gehört (21) nicht zu K_5, so ist die Folge der Schwankungen

$$(22)\quad V_1=\int_0^{2\pi}|L_1'(t)|\,dt,\ V_2=\int_0^{2\pi}|L_2'(t)|\,dt,\ \ldots,\ V_n=\int_0^{2\pi}|L_n'(t)|\,dt,\ldots$$

nicht beschränkt. In diesem Falle lässt sich aber nach Hilfssatz IV eine überall stetige Funktion $f^*(x)$ finden, so dass für $f(x)=f^*(x)$ die Folge der arithmetischen Mittel $T_n(x)$, $(n=1,2,3,\ldots)$ im Punkte $x=0$ nicht beschränkt ist. Ist nämlich die numerische Folge (22) nicht beschränkt, so kann man aus ihr eine Teilfolge $V_{n_1}, V_{n_2},\ldots, V_{n_\nu},\ldots$ herausgreifen, deren Elemente bei $\nu\to\infty$ gegen ∞ divergieren. Dann befriedigen aber die Funktionen $\varphi_\nu(x)=L_{n_\nu}(x)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes IV, also ist für $f^*(x)=\psi(x)$, $x=0$ die Folge der $T_n(x)$ nicht beschränkt. Dieser Umstand zeigt jedoch, dass die Folge $\{\lambda_n\}$ weder für K_4, noch für K_3 oder K_2 eine Folge der Faktoren der Klasseninvarianz ist, sonst würde sie nach Satz I die F.-Reihe der zur Klasse C_4, also zugleich zu C_3 und C_2 gehörigen Funktion $f^*(x)$ in eine Reihe (19) überführen, deren arithmetische Mittel in $(0, 2\pi)$ gleichmässig beschränkt sind.

Damit ist die Behauptung B_1 bewiesen.

3. Nunmehr wollen wir, als die Umkehrung von B_1, Folgendes beweisen:

B_2. Damit die Folge $\{\lambda_n\}$ die Eigenschaft habe, die F.-Reihe (15) irgendeiner der Klasse C_ν $(\nu=2,3,4,5)$ angehörenden

Funktion $f(x)$ in die F.-Reihe einer ebensolchen Funktion zu verwandeln, ist es hinreichend,[17]) dass die Sinusreihe (21) die F.-Entwicklung einer Funktion von beschränkter Schwankung sei.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, bedenke man zunächst, dass das Angehören der Reihe (21) zur Klasse K_6 nach dem Satze IV die gleichmässige Beschränktheit ihrer arithmetischen Mittel $L_n(x)$ i. B. auf die Schwankung in $(0, 2\pi)$ nach sich zieht. Bleiben aber die Schwankungen (22) unter einer gemeinsamen Schranke, so erfüllen die Cosinuspolynome $L_n'(x)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes III, betreffend die trigonometrischen Polynome $P_n(x)$, folglich gelten für die arithmetischen Mittel $T_n(x)$, mit Hinsicht auf ihre Darstellung durch die Formel (20) die Aussagen dieses Hilfssatzes betreffs der Polynome $Q_n(x)$. Also bilden die $T_n(x)$ eine Folge, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ gleichmässig beschränkt, bzw. integrierbar, stetig, von beschränkter Schwankung ist, falls die Funktion $f(x)$ daselbst beschränkt, bzw. integrierbar, stetig, von beschränkter Schwankung ist. Doch gehört die Reihe (19) bei solchem Benehmen ihrer arithmetischen Mittel $T_n(x)$ nach den Sätzen I—IV zur Klasse K_2, bzw. K_3, K_4, K_5, wie behauptet wurde.

Die Behauptungen B_1 und B_2, in einem Satze zusammengefasst, können folgender Weise ausgesprochen werden:

Satz V. *Die Folge* $\{\lambda_n\}$ *bildet i. B. auf irgendeine der Reihenklassen* K_ν $(\nu = 2, 3, 4, 5)$ *dann*[18]) *und nur dann eine Folge von Faktoren der Klasseninvarianz, wenn die Sinusreihe* $\sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin nx}{n}$ *die F.-Entwicklung einer Funktion von beschränkter Schwankung darstellt.*

4. Nunmehr wollen wir die bisherigen Ergebnisse auf K_1 und K_6 ausbreiten. Das kann i. B. auf die erste Klasse mit Hilfe des folgenden, eingangs schon erwähnten *Steinhaus*schen Satzes geschehen:

Die Folge $\{\lambda_n\}$ verwandelt die Reihen (15) der Klasse K_1 dann und nur dann in Reihen (19) derselben Klasse, wenn sie jede Reihe (15) der Klasse K_2 in eine Reihe (19) dieser Klasse überführt.

Dieser Satz, vereint mit dem Satze V, ergibt die folgende Ergänzung des letzteren:

---

[17]) Vgl. *Young*, a. a. O.[7])

[18]) Für die Klasse K_4 hat dieses Ergebniss schon *Young* explicite angegeben; für K_2 und K_5 ist es implicite in seinen Resultaten enthalten.

Satz VI. *Die Folge* $\{\lambda_n\}$ *verwandelt die F.-Reihe einer im L-Sinne integrierbaren Funktion dann und nur dann in die F.-Reihe einer solchen Funktion, falls* $\sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin nx}{n}$ *die F.-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung ist.*

5. Um endlich die Charakteristik der Folgen der Klasseninvarianz auch für K_6 zu gewinnen, bemerken wir zunächst folgendes: Ist

$$(23)\quad \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \ldots$$

die F.-Reihe einer Funktion der Klasse C_1, d. h. einer für jedes x erklärten, nach 2π periodischen, im L.-Sinne integrierbaren Funktion, so ist die durch gliedweise Integration hergeleitete trigonometrische Reihe

$$(24)\quad \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \sin x - \beta_1 \cos x + \ldots + \frac{\alpha_n \sin nx - \beta_n \cos nx}{n} + \ldots$$

die F.-Entwicklung einer Funktion der Klasse C_6, d. h. einer Funktion, die für jedes x erklärt, nach 2π periodisch ist und sich als das bestimmte Integral (im L.-Sinne) einer Funktion (von 0 bis x) darstellen lässt. Umgekehrt, gehört die Reihe (24) zur Klasse K_6, so ist (23) eine Reihe der Klasse K_1.

Aus dieser Bemerkung folgt: Die Folge $\{\lambda_n\}$ verwandelt die Reihen (15) der Klasse K_6 dann und nur dann in Reihen (19) derselben Klasse, wenn sie jede Reihe (15) der K_1 in eine Reihe (19) dieser Klasse überführt. Wären nämlich die λ_n Faktoren der Klasseninvarianz für K_1 ohne zugleich für K_6 solche Faktoren zu sein, dann müsste eine Reihe (15) in der letzteren Klasse existieren, derart, dass (19) nicht zur Klasse K_6 gehörte. In diesem Falle könnte jedoch — nach der obigen Bemerkung — die Reihe

$$\lambda_1 (b_1 \cos x - a_1 \sin x) + \lambda_2 (2 b_2 \cos 2x - 2 a_2 \sin x) + \ldots$$

nicht zu K_1 gehören, obzwar die Reihe

$$b_1 \cos x - a_1 \sin x + 2 b_2 \cos 2x - 2 a_2 \sin 2x + \ldots$$

— ebenfalls nach den oben Bemerkten — eine Reihe dieser Klasse ist, also würden die Faktoren λ_n, gegen Voraussetzung, nicht jede Reihe von K_1 in eine Reihe derselben Klasse überführen.

Ähnlich kann die Annahme widerlegt werden, dass eine Folge $\{\lambda_n\}$ existiert, deren Glieder für K_6 Faktoren der Klasseninvarianz sind, ohne zugleich für K_1 solche Faktoren zu sein. Diese Tatsache verknüpft mit dem Satze V, ergibt den

Satz VII. *Die Folge* $\{\lambda_n\}$ *verwandelt die Reihen der Klasse* K_6 *dann und nur dann in Reihen derselben Klasse, falls* $\sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin nx}{n}$ *die F.-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung ist.*

§ 5.

Über die Faktoren der Klassenkovarianz.

1. In diesem Schlussparagraphen werden wir unsere Frage betreffend die Faktoren der Klassenkovarianz erledigen, d. h. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen bestimmen, unter welchen eine Folge $\{\mu_n\}$ die Reihen

(25) $\quad b_1 \cos x - a_1 \sin x + b_2 \cos 2x - a_2 \sin 2x + \ldots$

der Klasse $\overline{K}_\nu$ $(\nu = 2, 3, 4, 5)$ in Reihen

(26) $\mu_1 (b_1 \cos x - a_1 \sin x) + \mu_2 (b_2 \cos 2x - a_2 \sin 2x) + \ldots$

der Klasse K_ν verwandelt. Auf einem ganz ähnlichen Wege, wie beim Beweise des Satzes V, gelangen wir zur folgenden Lösung des angeführten Problems:

Satz VIII. *Die Folge* $\{\mu_n\}$ *bildet i. B. auf irgendeine der 4 Reihenklussen* K_ν $(\nu = 2, 3, 4, 5)$ *dann*[19]) *und nur dann eine Folge von Faktoren der Klassenkovarianz, wenn die Cosinusreihe* $\sum_1^\infty \frac{\mu_n \cos nx}{n}$ *die F.-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung ist.*

2. Zur Begründung dieses Satzes nehmen wir zuerst an, dass die μ_n für irgendeine Klasse $\overline{K}_\nu$ Faktoren der Klassenkovarianz sind. Dann folgt die behauptete Eigenschaft der fraglichen Cosinusreihe auf die folgende Weise:

Ist $\nu = 5$, so gehört die Reihe $\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n}$ selbst zur Klasse $\overline{K}_\nu$, in diesem Falle bedarf also die Behauptung keines Beweises. In den drei übrigen Fällen ziehe man in Betracht, dass das n-te arithmetische Mittel der Reihe (26) leichtersichtlich in der Form

$$U_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t+x)\, M'_n(t)\, dt, \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{27}$$

dargestellt werden kann, wobei $M_n(t)$ das n-te arithmetische Mittel der Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\mu_n \cos nx}{n} \tag{28}$$

---

19) Vgl *Young* a. a. O. 7).

bedeutet, $f(x)$ aber diejenige Funktion (der Klasse C_2, C_3 oder C_4) angibt, deren F.-Entwicklung der Reihe (25) konjugiert ist.

Nun folgt aus (27), dass (28) bei unseren Annahmen die F.-Entwicklung einer Funktion der Klasse C_5 ist. Sonst würde nämlich nach Satz IV die Beziehung

$$\limsup_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} | M'_n(t) | \, dt = \infty$$

bestehen, folglich könnte man nach dem Hilfssatze IV eine für jedes x erklärte, nach 2π periodische, überall stetige Funktion $f^*(x)$ finden, so dass für $f(x) = f^*(x)$, $x = 0$, die Folge der arithmetischen Mittel $U_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht beschränkt, also (26) zu keiner der Klassen K_2, K_3, K_4 gehören würde, obzwar (25) jeder der Klassen $\overline{K_2}$, $\overline{K_3}$, $\overline{K_4}$ angehört. Dann wären aber die μ_n, gegen Annahme, nicht Faktoren der Klassenkovarianz weder für $\overline{K_2}$, noch für $\overline{K_3}$, $\overline{K_4}$. Damit ist die behauptete Eigenschaft der Reihe (28) bewiesen.

3. Jetzt nehmen wir umgekehrt an, dass (28) eine Funktion von beschränkter Schwankung darstellt. In diesem Falle ist die Folge

$$\int_0^{2\pi} | M'_1(t) | \, dt, \quad \int_0^{2\pi} | M'_2(t) | \, dt, \quad \ldots, \quad \int_0^{2\pi} | M'_n(t) | \, dt, \quad \ldots$$

nach dem Satze IV beschränkt, also kann der Hilfssatz III, mit Hinsicht auf die Formel (27), auf die arithmetischen Mittel $U_n(x)$ der Reihe (26) angewendet werden. Daher ist die Folge $\{U_n(x)\}$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ gleichmässig beschränkt, integrierbar, stetig, von beschränkter Schwankung, je nachdem die Funktion $f(x)$ daselbst überall beschränkt, integrierbar, stetig, von beschränkter Schwankung ist. D s ist aber nach den Sätzen I—IV gleichbedeutend mit der Behauptung, dass (26) zur Klasse K_2, K_3, K_4, K_5 gehört, je nachdem (25) eine Reihe von $\overline{K_2}$, $\overline{K_3}$, $\overline{K_4}$, $\overline{K_5}$ ist.

Damit ist unser Satz VIII in allen Stücken bewiesen.

Budapest, den 10. 12. 1922.

Über die Konvergenz von Funktionenfolgen.

Von ALFRED HAAR in Szeged.

Um die Theorie der Reihenentwicklungen auf eine möglichst allgemeine Grundlage zu stellen, habe ich in meiner Inauguraldissertation[1]) die linearen Funktionaloperationen in den Dienst dieser Theorie herangezogen. Möge es sich nämlich um die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems oder nach noch allgemeineren Funktionen handeln, wie es in der Theorie von Herrn *Lebesgue* über singuläre Integrale der Fall ist, so kann man in ganz abstrakter Weise die formal gebildeten Reihen dadurch fassen, dass man eine distributive Zuordnung zu Grunde legt, die jeder Funktion $f(s)$ einer gewissen Funktionenklasse eine Folge von Funktionen

$$f_1(s),\ f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

zuordnet. Die Distributivität dieser Zuordnung drückt sich durch die Tatsache aus, dass, wenn zu der Funktion $f(s)$ die obige Funktionenfolge, zu der Funktion $g(s)$ aber die Folge: $g_1(s)$, $g_2(s), \ldots, g_n(s), \ldots$ zugeordnet ist, der Funktion $af(s)+bg(s)$, wo a und b beliebige Konstanten bedeuten, die Folge der Funktionen $af_n(s)+bg_n(s)$ entspricht.

Ich habe in meiner erwähnten Arbeit erkannt, dass aus der Tatsache, dass für gewisse Funktionen $f(s)$ diese Funktion der Limes der ihr zugeordneten Funktionenfolge ist, das Entsprechende für einen umfassenderen Bereich von Funktionen folgt, falls die zu Grunde gelegte Zuordnung eine bestimmte Eigenschaft aufweist. So bewies ich,[2]) dass falls die Zuordnung so beschaffen ist, dass eine Konstante M existiert, so dass für jedes in Betracht

[1]) „Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme" Göttingen 1909; erschienen in den Math. Annalen, Bd. 69. S. 331—371.

[2]) l. c. p. 349—351.

kommende $f(s)$, für alle n und s die Funktionen $|f_n(s)|$ stets kleiner als $M \cdot max|f(s)|$ sind, so kann aus dem Bestehen der Limesgleichung

$$\lim_{n \to \infty} f_n(s) = f(s) \qquad (1)$$

für gewisse $f(s)$, das Bestehen derselben Gleichung für jede solche Funktion gefolgert werden, die gleichmässig durch jene $f(s)$ (für die die obige Gleichung gilt) beliebig genau approximierbar ist. Mit anderen Worten, die Gesamtheit der Funktionen $f(s)$, für die (1) richtig ist, ist eine abgeschlossene in dem Sinne, dass sie alle Funktionen enthält, die sich als gleichmässiger Limes einer Funktionenfolge, deren Funktionen ihr angehören, ergeben. So kann z. B. — falls die Zuordnung die erwähnte Eigenschaft besitzt — aus der Tatsache, dass (1) für alle Polynome besteht, dasselbe für alle stetige Funktionen geschlossen werden, wodurch die Frage der Entwickelbarkeit einer stetigen Funktion auf die, von viel einfacheren Funktionen zurückgeführt wird, und die Theorie der gleichmässigen Approximation in den Dienst der Theorie der Reihenentwicklungen gestellt wird.

Diese Untersuchungen gestatten aber schwerlich die Entwickelbarkeit von unstetigen Funktionen anzugreifen. Dies ist eben der Zweck der vorliegenden Arbeit, in der ich eine Eigenschaft der Zuordnung angeben werde, auf Grund deren man z. B. aus dem Umstande, dass die Limesgleichung (1) etwa für jedes Polynom richtig ist, schliessen kann, dass diese für alle beschränkten Funktionen richtig bleibt mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null. Damit gewinnt man einen Satz, der in diesem Gedankenkreis auf die Entwickelbarkeit der allgemeinen beschränkten Funktionen schliessen lässt. Die erhaltenen Kriterien stehen in enger Berührung mit der wichtigen Theorie von Herrn *Lebesgue* über singuläre Integrale [3])

Die Methode, die ich dabei benutze, ist eine Weiterentwicklung des Begriffes der mittleren Konvergenz, (convergence en moyenne), die Herr *E. Fischer* eingeführt hat und den Mittelpunkt seiner schönen Untersuchungen über orthogonale Funktionen bildet.[4]) Nach Herrn *Fischer* heisst bekanntlich eine Funktionenfolge

---

[3]) *H. Lebesgue:* Sur les intégrales singulières, Annales de Toulouse 3. S., I. p. 25—117.

[4]) *E. Fischer:* Sur la convergence en moyenne. Comptes Rendus. 13 mai 1907.

$f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ im Mittel gegen die Funktion $f(s)$ konvergent, wenn die Integrale

$$\int (f(s)-f_n(s))^2 ds$$

(genommen über den Definitionsbereich der Funktionen) mit wachsendem n gegen Null streben. Dieser Begriff wurde von Herrn *F. Riesz* verallgemeinert[5]), indem er die vorgelegte Funktionenfolge $f_n(s)$ im Bezug auf den Exponenten p gegen $f(s)$ „stark" konvergent nennt, wenn

$$\lim_{n=\infty} \int (f(s)-f_n(s))^p\, ds = 0. \qquad (p > 1)$$

Ich führe nun den folgenden Begriff ein, der als eine natürliche Verallgemeinerung dieser „mittleren" Konvergenz zu betrachten ist.

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ eine nicht abnehmende Folge positiver Zahlen. Die in der abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ (vom positiven Mass) definierten Funktionen

$$f_n(s) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

heissen in dieser Punktmenge in Bezug auf das Exponentensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ im Mittel gegen die Funktion $f(s)$ konvergent, wenn

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} (f(s)-f_n(s))^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0$$

ist. Sind alle Exponenten gleich p, so ergeben sich die früheren Begriffsbildungen; in diesen Fällen folgt — wie bekannt — keineswegs, dass die Folge $f_n(s)$ im gewöhnlichen Sinne gegen $f(s)$ konvergiert; ja man kann mit Leichtigkeit Beispiele konstruieren, wo dies an keiner Stelle der Fall ist. Wenn aber die Exponentenreihe der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, über alle Grenzen wächst und zwar so, dass die Grössen

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleiben, so kann man — wie in § 1 gezeigt wird — aus der Konvergenz im Mittel in Bezug auf ein solches Exponentensystem schliessen dass für fast alle s in $\mathfrak{M}$

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s)$$

ist.

---

[5]) *F. Riesz:* Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Annalen Bd. 69. S. 449—497.

Auf Grund dieses Hilfssatzes leite ich in § 2 einen Satz über die Konvergenz von Funktionenfolgen ab, der für die Entwickelbarkeit von allgemeinen beschränkten Funktionen ungefähr ebensoviel aussagt, wie der oben erwähnte Satz meiner Dissertation für die stetigen Funktionen. An Stelle der gleichmässigen Konvergenz tritt die hier entwickelte mittlere Konvergenz, wodurch man Aussagen über Entwickelbarkeit solcher Funktionen gewinnt, die in diesem Sinne durch die einfachsten Funktionen beliebig genau approximierbar sind.

§ 1. Ein Hilfssatz.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene Punktmenge vom positiven Mass; die in dieser Punktmenge definierten Funktionen

$$F_1(s), F_2(s), \ldots, F_n(s), \ldots$$

mögen so beschaffen sein, dass das Integral

$$\int_{(\mathfrak{M})} | F_n(s) |^n \, ds$$

im Lebesgue'schen Sinne existiert und die Zahlenfolge

$$\delta_n = \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} | F_n(s) |^n \, ds \right\}^{\frac{1}{n}}$$

mit wachsendem n gegen Null strebt. Unter diesen Bedingungen konvergiert die zu Grunde gelegte Funktionenfolge fast überall gegen Null, d. h. es gilt die Limesgleichung

$$\lim_{n \infty} F_n(s) = 0$$

für jede Stelle s in $\mathfrak{M}$ mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir irgendeine positive Zahl ε und bezeichnen mit $\mathfrak{m}_n(\varepsilon)$ diejenige Teilmenge von $\mathfrak{M}$ in der

$$| F_n(s) | \geqq \varepsilon$$

ist; sei $m_n(\varepsilon)$ das Mass dieser Punktmenge. Dann ist

$$\delta_n^n = \int_{(\mathfrak{M})} | F_n(s) |^n \, ds \geqq m_n(\varepsilon) \, \varepsilon^n$$

und daher

$$\sqrt[n]{m_n(\varepsilon)} \leqq \frac{\delta_n}{\varepsilon}$$

Auf Grund unserer Annahme über die Zahlenfolge δ_n folgt aus dieser Ungleichung

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{m_n(\varepsilon)} = 0,$$

und daraus die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$m_1(\varepsilon) + m_2(\varepsilon) + \ldots + m_n(\varepsilon) + \ldots$$

Der N-te Rest dieser Reihe

$$m_N(\varepsilon) + m_{N+1}(\varepsilon) + m_{N+2}(\varepsilon) + \ldots$$

wird daher für hinreichend grosse Werte von N kleiner als irgendeine positive Grösse η. Mit anderen Worten, die Vereinigungsmenge der Mengen

$$\mathfrak{m}_N(\varepsilon),\ \mathfrak{m}_{N+1}(\varepsilon),\ \mathfrak{m}_{N+2}(\varepsilon), \ldots$$

hat für hinreichend grosse Werte des Zeigers N ein beliebig kleines Mass. Dies bedeutet aber, dass jede Funktion der Folge

$$|F_N(s)|,\ |F_{N+1}(s)|,\ |F_{N+2}(s)|, \ldots$$

mit Ausnahme dieser Vereinigungsmenge, deren Mass η nicht überschreitet, kleiner als ε ausfällt; daraus folgt, dass der limes superior der Funktionenfolge

$$|F_1(s)|,\ |F_2(s)|, \ldots, |F_n(s)|, \ldots$$

jedenfalls kleiner als ε ist, mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge, deren Mass η nicht übersteigt. Da η beliebig klein angenommen werden kann, so ergiebt sich daraus das Resultat, dass

$$\limsup_{n=\infty} |F_n(s)|$$

mit Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null kleiner als ε ausfällt bei jeder Wahl der positiven Zahl ε. Es sei nun $\mathfrak{m}(\varepsilon)$ diejenige Punktmenge (vom Masse Null) in der

$$\limsup_{n=\infty} |F_n(s)| \geqq \varepsilon$$

ist, und $\mathfrak{m}$ die Vereinigungsmenge der Mengen

$$\mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{2}\right),\ \mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{3}\right),\ \mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{4}\right), \ldots, \mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{n}\right), \ldots$$

Das Mass dieser Menge $\mathfrak{m}$ — als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Nullmengen — ist jedenfalls gleich Null; ausserhalb dieser Menge kann aber $\limsup\limits_{n=\infty} |F_n(s)|$ nicht von Null verschieden sein, da $\mathfrak{m}$ alle Stellen enthält in denen dieser limes superior grösser als $\dfrac{1}{n}$ ist, wobei n irgendeine positive ganze Zahl bedeutet. D. h. die zu Grunde gelegte Funktionenfolge konvergiert an jeder Stelle, die ausserhalb der Punktmenge $\mathfrak{m}$ (vom Masse Null) gelegen ist, gegen Null, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Der Gedanke, der diesem Satze zu Grunde liegt, ist eine sinngemässe Übertragung auf Funktionenfolgen eines Verfahrens, der nach *Bernoulli* benannt zur Bestimmung des Maximums einer Funktion dient. Bekanntlich konvergiert, wenn $f(s)$ irgendeine Funktion bedeutet, deren Potenzen integrierbar sind, die Zahlenfolge

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)|^n \, ds \right\}^{\frac{1}{n}}$$

gegen das „wesentliche" Maximum der Funktion $|f(s)|$, d. h. gegen die kleinste Zahl M von der Beschaffenheit, dass diejenige Punktmenge, in der $|f(s)| > M$ ist, das Mass Null besitzt. Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar, dass aus der Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)|^n \, ds \right\}^{\frac{1}{n}} = 0$$

für fast alle s

$$f(s) = 0$$

folgt. Unser Satz lehrt nun, wenn man in das n-te Glied der letzten Zahlenfolge $f(s)$ durch $F_n(s)$ ersetzt aus dem Bestehen der so erhaltenen Limesgleichung für die Grenzfunktion dieser Funktionenfolge $F_n(s)$ die entsprechende Tatsache gefolgert werden kann.

Unser Satz gestattet eine nicht uninteressante Verallgemeinerung, die die Tragweite des Resultates überblicken lässt.

Es sei

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

eine zunehmende Folge positiver Zahlen von der Beschaffenheit, dass die Grössen

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze C bleiben. Wenn die Funktionen $F_n(s)$ so beschaffen sind, dass die Grössen

$$\delta_n = \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} | F_n(s) |^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

mit wachsendem n gegen Null konvergieren, so folgt wiederum für fast alle s

$$\lim_{n=\infty} F_n(s) = 0.$$

In der Tat, man erkennt — genau wie oben — wenn man wiederum mit $\mathfrak{m}_n(\varepsilon)$ diejenige Punktmenge bezeichnet, in der

$|F_n(s)| \geqq \varepsilon$ ist und mit $m_n(\varepsilon)$ das Mass dieser Punktmenge, dass

$$\delta_n^{\lambda_n} = \int_{(\mathfrak{M})} |F_n(s)|^{\lambda_n} ds \geqq m_n(\varepsilon)\, \varepsilon^{\lambda_n},$$

also

$$m_n(\varepsilon) \leqq \left(\frac{\delta_n}{\varepsilon}\right)^{\lambda_n}.$$

Wählen wir den Zeiger n so gross, dass die Ungleichung

$$\delta_n \leqq \varepsilon\, e^{-2C}$$

statthabe, so ist für solche n

$$m_n(\varepsilon) \leqq e^{-2C\lambda_n}$$

also, — wegen unserer Annahme $\log n \leqq C\lambda_n$ —

$$m_n(\varepsilon) < e^{-2\log n} = \frac{1}{n^2}.$$

Daraus folgt wiederum die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$m_1(\varepsilon) + m_2(\varepsilon) + \ldots + m_n(\varepsilon) + \ldots$$

und daraus — wörtlich wie oben — die Tatsache, dass die Funktionenfolge $F_n(s)$ fast überall gegen Null konvergiert.

In der Terminologie, die wir in der Einleitung eingeführt haben, können wir unser Resultat folgendermassen formulieren:

Wenn die Funktionenfolge

$$F_1(s),\, F_2(s), \ldots, F_n(s), \ldots$$

in Bezug auf das Exponentensystem

$$\lambda_1,\, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

das die Bedingung

$$\left|\frac{\log n}{\lambda_n}\right| < C \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

erfüllt, (wobei C eine von n unabhängige Zahl bedeutet) *in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ im Mittel gegen eine Funktion $F(s)$ konvergiert, so gilt für alle Stellen im $\mathfrak{M}$, mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge die Limesgleichung*

$$\lim_{n=\infty} F_n(s) = F(s).$$

Nicht uninteressant ist die Tatsache, dass der soeben bewiesene Satz nicht mehr richtig bleibt, wenn die Exponenten λ_n so beschaffen sind, dass die Grössen $\frac{\log n}{\lambda_n}$ über alle Grenzen wachsen. Um dies darzulegen, nehmen wir

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = \infty$$

an und konstruieren eine Folge von Funktionen $F_n(s)$, die auf der Peripherie eines Kreises (K) definiert sind, an keiner Stelle gegen Null konvergieren und so beschaffen sind, dass

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{(K)} |F_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0$$

ist. Zu diesem Ende verfahren wir, wie folgt:

$F_1(s)$ sei auf der gesamten Kreisperipherie, deren Länge wir der Einfachheit halber gleich 1 annehmen, gleich 1; $F_2(s)$ sei auf einem Halbbogen (K_2) gleich 1; auf dem anderen Halbbogen gleich 0. An den einen Endpunkt von K_2 legen wir einen Kreisbogen K_3 von der Länge $1/3$ an, der ganz ausserhalb von K_2 liegt; auf diesem Bogen sei $F_3(s)$ gleich 1, sonst überall gleich Null. An den Endpunkt von K_3 legen wir ausserhalb von K_3 einen Bogen K_4 von der Länge $1/4$ an; auf diesem sei $F_4(s)$ gleich 1, sonst überall gleich 0, und so fahren wir fort. Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe werden die Kreisbögen

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ \ldots,\ K_n,\ \ldots,$$

von denen jeder am Endpunkt des vorangehenden beginnt und die n-te von der Länge $\frac{1}{n}$ ist, jeden Punkt des Kreises unendlich oft überdecken. Da $F_n(s)$ auf K_n gleich 1 ist (sonst überall gleich 0), so folgt, dass an jeder Stelle s des Kreisumfanges unendlichviele Funktionen unserer Folge den Wert 1 haben, d. h. die Folge konvergiert an keiner Stelle gegen Null. Andererseits ist

$$\left\{ \int_{(K)} |F_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = \left\{ \int_{(K_n)} |F_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\lambda_n}} = e^{-\frac{\log n}{\lambda_n}},$$

und diese Grössen streben — zufolge unserer Annahme — in der Tat gegen Null.

Es soll noch besonders hervorgehoben werden, dass wir bei dem Beweise unseres Theorems nirgends die Voraussetzung gemacht haben, dass $\mathfrak{M}$ eine *lineare* Punktmenge ist. Satz und Beweis bleiben richtig, wenn $\mathfrak{M}$ eine mehrdimensionale abgeschlossene Punktmenge bedeutet, die auftretenden Funktionen folglich von mehreren Veränderlichen abhängen. Wir haben es vorgezogen statt den unabhängigen Veränderlichen, in den über die Punktmenge $\mathfrak{M}$ genommenen Integralen als Integrationsvariable die Veränderliche s einzuführen, die den allgemeinen Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnet; an dieser Bezeichnungsweise halten wir auch weiterhin fest.

§ 2. Ein Satz über die Konvergenz von Funktionenfolgen.

Auf Grund des vorangehenden Hilfssatzes kann man den Beweis eines Theorems erbringen, der die sinngemässe Verallgemeinerung eines Satzes ist, den ich in meiner Dissertation ausgesprochen habe.

Ich bewies in der genannten Arbeit den folgenden Satz:

Jeder Funktion $f(s)$ einer bestimmten Funktionenklasse möge eine Folge von Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ zugeordnet sein; in Zeichen

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

Diese Zuordnung besitze folgende Eigenschaften:

Ist

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

und

$$g(s) \sim g_1(s), g_2(s), \ldots, g_n(s), \ldots$$

so ist

$$f(s) + g(s) \sim f_1(s) + g_1(s), f_2(s) + g_2(s), \ldots, f_n(s) + g_n(s), \ldots$$

Es sei für jedes s stets $|f_p(s)|$ kleiner als die obere Grenze von $|f(s)|$ multipliziert mit einer Grösse M, die für alle Funktionen der Klasse dieselbe ist.

Wenn nun $f'(s), f''(s), \ldots f^{(n)}(s), \ldots$ eine Folge von Funktionen ist, die gleichmässig gegen die Funktion $f(s)$ konvergieren und wenn die zu $f^{(n)}(s)$ vermöge unserer Zuordnung zugeordneten Funktionenfolgen gleichmässig in s bezw. gegen $F^{(n)}(s)$ konvergieren, d. h. gleichmässig in s die Limesgleichungen bestehen

$$\lim_{p \to \infty} f_p^{(n)}(s) = F^{(n)}(s),$$

so konvergiert die zu $f(s)$ zugeordnete Funktionenfolge gleichmässig gegen eine Funktion $F(s)$ und es ist

$$\lim_{n \to \infty} F^{(n)}(s) = F(s).$$

Mit Hilfe dieses Satzes konnte ich verschiedene Probleme aus der Theorie der *Fourier*'schen und *Sturm-Liouville*'schen Reihen erledigen, insbesondere ein Summationsverfahren angeben, mit dessen Hilfe — in voller Analogie zu dem *Fejér*'schen Verfahren für *Fourier*'sche Reihen einer Veränderlichen — die *Fourier*'sche und *Sturm-Liouville*'sche Doppelreihe jeder stetigen Funktion zweier Variabler summierbar ist, ein Problem, das seither von verschiedenen Seiten behandelt worden ist.

Auf Grund des Hilfssatzes des vorangehenden Paragraphen beweise ich nun das folgende Theorem:

Jeder Funktion $f(s)$ einer bestimmten Funktionenklasse möge eine Folge von Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ zugeordnet sein. Diese Zuordnung besitze folgende Eigenschaften:

A) Wenn der Funktion $f(s)$ die Folge $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ zugeordnet ist, der Funktion $g(s)$ aber die Folge $g_1(s), g_2(s), \ldots, g_n(s), \ldots$, so soll der Funktion $af(s) + bg(s)$, wo a und b beliebige Konstanten bedeuten, die Folge

$$af_1(s) + bg_1(s),\ af_2(s) + bg_2(s),\ \ldots,\ af_n(s) + bg_n(s),\ \ldots$$

zugeordnet sein.

B) Es existiert eine Folge von zunehmenden positiven Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass die Grössen

$$\frac{\log n}{\lambda_n}$$

für jedes n unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleiben und eine feste Zahl M, so dass für jede Funktion unserer Funktionenklasse und für alle Indizes n die Ungleichung

$$\left\{\int_{\mathfrak{M}} |f_n(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} \leqq M \left\{\int_{\mathfrak{M}} |f(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

richtig sei.

Wenn einerseits die Funktionen $f'(s), f''(s), \ldots, f^{(m)}(s), \ldots$ solche Funktionen unserer Klasse bedeuten, die in Bezug auf das Exponentensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ im Mittel gegen eine Funktion $f(s)$ unserer Klasse konvergieren und wenn andererseits die zu jeder der betrachteten Funktionen $f^{(m)}(s)$ vermöge unserer Zuordnung zugeordneten Funktionen in Bezug auf das Exponentensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ im Mittel gegen diese Funktion konvergieren, so konvergiert die der Funktion $f(s)$ zugeordnete Funktionenfolge im Mittel (in Bezug auf $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$) *gegen $f(s)$; mit anderen Worten es folgt aus den Limesgleichungen*

$$\lim_{m=\infty} \left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - f^{(m)}(s)|^{\lambda_m} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_m}} = 0$$

und

$$\lim_{n=\infty} \left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f^{(m)}(s) - f_n^{(m)}(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - f_n(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0,$$

d. h. es gilt mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge

$$\lim_{n \to \infty} f_n(s) = f(s).$$

Der soeben ausgesprochene Satz gilt a fortiori — diesem Umstand begegnen wir in den meisten Anwendungen — wenn die den Funktionen $f^{(m)}(s)$ zugeordneten Funktionenfolgen $f_n^{(m)}(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gleichmässig gegen $f^{(m)}(s)$ konvergieren, denn aus der gleichmässigen Konvergenz folgt unmittelbar die Konvergenz im Mittel in Bezug auf jedes Exponentensystem.

Um unseren Satz zu beweisen, bestimmen wir zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε einen Index m derart, dass

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - f^{(m)}(s)|^{\lambda_m} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_m}} < \varepsilon$$

sei, was zufolge unserer Annahme über die Konvergenz der Funktionen im Mittel gegen $f(s)$ jedenfalls möglich ist. Alsdann ist — wegen der Eigenschaft *B)* unserer Zuordnung — für jedes n

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f_n^{(m)}(s) - f_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} < M\varepsilon,$$

da — wegen *A)* — der Funktion $f^{(m)}(s) - f(s)$ die Folge $f_n^{(m)}(s) - f_n(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ zugeordnet ist. Endlich bestimmen wir einen Index N derart, dass für alle $n > N$ die Ungleichung

$$\left\{ \int |f^{(m)}(s) - f_n^{(m)}(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} < \varepsilon$$

statthabe, was auf Grund unserer Annahme über die Konvergenz der Folge $f_n^{(m)}(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ im Mittel gegen $f^{(m)}(s)$ sicher möglich ist. Durch Addition der letzten drei Ungleichungen folgt unter Benutzung einer bekannten Ungleichung[6]) für hinreichend grosse n

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - f_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} =$$

$$= \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |(f(s) - f^{(m)}(s)) + (f^{(m)}(s) - f_n^{(m)}(s)) + (f_n^{(m)}(s) - f_n(s))|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} \leqq$$

$$< (M + 2)\varepsilon$$

---

[6]) Es handelt sich um die für $p > 1$ gültige Ungleichung

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} (\varphi_1(s) + \varphi_2(s))^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} (\varphi_1(s))^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} (\varphi_2(s))^p ds \right\}^{\frac{1}{p}}$$

die im wesentlichen auf Minkowski zurückgeht; vgl. auch *F. Riesz.* l. c. p. 456.

Daraus folgt aber, dass der Integralmittelwert

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)-f_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

mit wachsendem n gegen Null strebt und auf Grund unseres Hilfssatzes, dass die Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$, mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge überall gegen $f(s)$ konvergieren.

Bei den Anwendungen dieses Satzes hat man grösstenteils mit solchen Fällen zu tun, in denen die zu Grunde gelegte Funktionenklasse alle Funktionen umfasst, deren sämtliche positiven Potenzen im *Lebesgue*'schen Sinne integrierbar sind, oder wenigstens diejenigen Funktionen, deren absoluter Betrag unterhalb einer festen Grenze bleibt (die sog. beschränkten Funktionen). Wenn sodann die Zuordnung die Bedingungen unseres Satzes erfüllt und etwa jeder stetigen Funktion eine solche Funktionenfolge zuordnet, die in Bezug auf das fragliche Exponentensystem im Mittel gegen diese Funktion konvergiert, so gilt dieselbe Tatsache auch für jede beschränkte Funktion bez. für jede Funktion deren sämtliche Potenzen integrierbar sind. Man erkennt dies durch Heranziehung der bekannten Tatsache,[7]) dass man zu jeder solchen Funktion $f(s)$ und zu jedem positiven Exponenten p eine stetige Funktion $\varphi(s)$ derart bestimmen kann, dass das Integral

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)-\varphi(s)|^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} = \delta_p$$

beliebig klein ausfalle; setzt man $p = \lambda_m$, $\varphi(s) = f^{(m)}(s)$ und lässt δ_p gegen Null konvergieren, so gewinnt man damit eine Folge von stetigen Funktionen

$$f'(s), f''(s), \ldots, f^{(m)}(s), \ldots$$

die in Bezug auf das vorgelegte Exponentensystem im Mittel gegen $f(s)$ konvergieren, woraus auf Grund des Hauptsatzes dieses Paragraphen unsere Behauptung unmittelbar folgt.

---

[7]) Diese Tatsache wird in der Theorie der *Lebesgue*'schen Integrale häufig angewandt; einen einfachen Beweis findet man in der genannten Arbeit von *F. Riesz* (p. 459) wo $\varphi(s)$ als eine Funktion angenommen wird, die in einer endlichen Anzahl von Intervallen verschiedene Werte annimmt. Der Übergang von diesen streckenweise konstanten Funktionen zu den stetigen Funktionen ist unmittelbar klar. Übrigens kann die erwähnte Tatsache auch aus dem *Lusin*'schen Satze (Comptes Rendus, t. 154 (1912) p. 1688.) gefolgert werden, nach dem zu jeder messbaren Funktion $f(s)$ eine stetige Funktion konstruiert werden kann, die mit Ausnahme einer Punktmenge vom beliebig kleinen Mass mit $f(s)$ übereinstimmt.

Man erkennt auch, dass der Schluss richtig bleibt, sowie die vorgelegte Zuordnung so beschaffen ist, dass sie zu gewissen Funktionen $\varphi(s)$ eine solche Funktionenfolge zuordnet, die im Mittel (in Bezug auf $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m, \ldots$) gegen diese Funktion konvergiert, falls diese Funktionen $\varphi(s)$ die Eigenschaft besitzen, dass zu jeder in beliebig hoher Potenz integrierbaren Funktion $f(s)$ eine unter ihnen sich finden lässt, dass das Integral

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - \varphi(s)|^p \, ds \right\}^{\frac{1}{p}}$$

für irgend eine pos. Zahl p beliebig klein ausfalle. Alle Polynome, alle differenzierbare, oder alle streckenweise konstante-Funktionen erfüllen offenbar diese Bedingung ebenfalls.

Die in der vorliegenden Note bewiesenen Sätze sind in mannigfacher Weise anwendbar, insbesondere auf die Theorie der Entwicklungen einer willkürlichen Funktion nach den Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems, sowie auf die etwas allgemeinere Theorie der singulären Integrale. Auf diese Anwendungen hoffe ich demnächst zurückkommen zu können.

Sur la représentation conforme de domaines variables.

Par TIBOR RADÓ à Szeged.

Soit Γ une courbe de Jordan simple et fermée dans le plan de la variable x, contenant le point $x=0$ à son intérieur. Il existe alors une fonction $f(z)$ de la variable z, effectuant une représentation conforme du domaine $|z|<1$ sur le domaine limité par cette courbe. Cette fonction est entièrement déterminée si l'on exige encore que $f(0)=0$, $f'(0)>0$. Elle est, comme on sait, continue sur la circonférence $|z|=1$, et elle la représente d'une manière continue et biunivoque sur la courbe Γ.

La courbe Γ étant fixée, soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \ldots$ une suite de courbes, toutes ces courbes renfermant le point $x=0$. Soient $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ les fonctions correspondantes, où $f_n(0)=0$, $f'_n(0)>0$. Il est à prévoir que la suite $f_n(z)$ convergera vers $f(z)$ dès qu'il y aura *convergence géométrique* des courbes Γ_n vers la courbe Γ. Il faudra, pour arriver à des résultats précis, donner un sens précis à l'expression *„convergence géométrique."* C'est M. *Carathéodory* qui a approfondi le premier cette question.[1]) Dans ses recherches il a considéré des domaines simplement connexes tout à fait généraux et il a établi une condition nécessaire et suffisante pour que $f_n(z) \to f(z)$ *à l'intérieur* de la circonférence unité. En appliquant son théorème au cas spécial où ces domaines sont limités par des courbes de Jordan, on arrive à une condition suffisante très simple que nous allons formuler, parce que nous en ferons usage dans la suite.

---

[1]) *C. Carathéodory,* Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, Math. Annalen 72. *Cf.* aussi: *L. Bieberbach,* Über einen Satz des Herrn Carathéodory, Göttinger Nachrichten 1913.

Supposons que pour les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \ldots; \Gamma$ la condition suivante soit remplie :

(C) $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ étant une suite de points quelconque telle que P_n est situé sur Γ_n, tous les points limites de cette suite sont situés sur Γ.

Comme toutes ces courbes contiennent le point $x = 0$ à leur intérieur, on voit immédiatement que tout ensemble fermé intérieur (extérieur) à Γ sera aussi intérieur (extérieur) à Γ_n dès que n est assez grand. Le domaine intérieur de Γ est par conséquent le *noyau (Kern)* des domaines limités par les courbes Γ_n, au sens que M. *Carathéodory* a donné à cette expression. Nous pouvons donc affirmer que *la condition (C) est suffisante pour que $f_n(z) \rightarrow f(z)$ à l'intérieur de la circonférence unité.*

Dans la note présente nous nous proposons l'étude de la convergence de la suite $f_n(z)$ *sur la circonférence même* du cercle $|z| \leq 1$. Nous allons établir une condition nécessaire et suffisante pour que $f_n(z)$ converge vers $f(z)$ uniformément dans le cercle unité, *circonférence comprise*. Comme l'indique M. *R. Courant*,[2]) M. *Carathéodory* a possédé un théorème analogue à celui que nous allons démontrer, mais il n'a rien publié à cet égard. C'est M. *R. Courant*[2]) qui a esquissé une première démonstration du théorème en question, dont il vient de compléter et de rectifier l'énoncé dans une note[3]) parue récemment. Je crois cependant qu'il n'est pas inutile de reprendre la question. La condition, comme nous la présenterons s'offrira immédiatement en cherchant des conditions nécessaires, et il s'agira seulement de montrer qu'elle est suffisante. A cet effet, je me sers des méthodes que M. *E. Lindelöf*[4]) a développées pour étudier la représentation conforme à la frontière et qui s'appliquent sans plus au problème plus délicat que nous allons traiter.

---

[2]) *R. Courant*, Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung, Göttinger Nachrichten 1914.

[3]) *R. Courant*, Bemerkung zu meiner Note „Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung". Göttinger Nachrichten 1922, le 14 Juillet. — En Juin 1922 j'ai communiqué un extrait de la note présente à M. Courant.

[4]) *E. Lindelöf*, Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme, Acta Soc Scient. Fennicae, XLVI, 1915.

1. Pour arriver à la condition annoncée ci-dessus, désignons par M_n le maximum de $|f(z)-f_n(z)|$ pour $|z| \leq 1$. Comme la fonction $f(z)-f_n(z)$ atteint le maximum de son module pour $|z|=1$, nous avons pour M_n l'interprétation géométrique suivante:

En faisant parcourir au point z la circonférence $|z|=1$, les points $f(z)$ et $f_n(z)$ décriront respectivement les courbes Γ et Γ_n. On aura établi de la sorte une représentation biunivoque et continue de ces courbes l'une sur l'autre, et M_n sera le maximum de la distance de deux points correspondants. Considérons maintenant l'écart Δ_n de ces deux courbes comme il a été défini par M. *Fréchet.*[5]) On a évidemment $M_n \geq \Delta_n$. Dire que la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$, c'est dire que $M_n \rightarrow 0$. *Par conséquent* $\Delta_n \rightarrow 0$ *est une condition nécessaire pour la convergence uniforme* et nous allons établir que cette condition est aussi suffisante. Nous énonçons ce résultat dans le théorème suivant:

Théorème. *Soient* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \ldots ; \Gamma$ *des courbes de Jordan simples et fermées dans le plan de la variable x, contenant le point* $x=0$ *à leur intérieur, et soient*

$f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots ; f(z) \qquad (f_n(0)=f(0)=0, f'_n(0)>0, f'(0)>0)$
les fonctions effectuant la représentation conforme du domaine $|z|<1$ *sur les domaines limités par ces courbes.*

Pour que la suite $f_n(z)$ *converge vers* $f(z)$ *uniformément dans le cercle unité, circonférence comprise, il faut et il suffit que l'écart (au sens de Fréchet) des courbes* Γ *et* Γ_n *converge vers zéro.*

Voilà la marche de la démonstration. Au no 2 nous ferons quelques remarques préliminaires, entre autres que la condition *(C)* énoncée plus haut est remplie si l'écart des courbes Γ et Γ_n converge vers zéro. Dès lors la convergence de la suite $f_n(z)$ vers $f(z)$ est assurée pour *l'intérieur* de la circonférence unité, comme il a été remarqué plus haut. Au no 3 nous établirons la continuité uniforme de la suite $f_n(z)$ sur la circonférence $|z|=1$. Ces points acquis, on achèvera la démonstration de la façon suivante:

---

[5]) *M. Fréchet,* Sur l'écart de deux courbes, American M. S. Trans. VI. 1905. Voilà la définition de M. Fréchet: C et C′ étant deux courbes de Jordan, considérons toutes les représentations biunivoques et continues de ces courbes l'une sur l'autre. Pour chacune de ces représentations il y a une plus grande distance de deux points correspondants. La limite inférieure de ces plus grandes distances est l'écart des deux courbes.

Soit comme plus haut $M_n = \max |f(z) - f_n(z)|$ pour $|z| = 1$. Il s'agit de démontrer que $M_n \to 0$. Supposons que ceci ne soit pas vrai; on pourra alors extraire de la suite $f_n(z)$, uniformément continue pour $|z| = 1$, en vertu d'un théorème connu d'*Arzelà* une suite partielle $\overline{f_n}(z)$ uniformément convergente pour $|z| = 1$, pour laquelle on a $\overline{M_n} \geqq \delta > 0$. Il résulte alors du principe du module que cette suite converge aussi pour $|z| < 1$. Si nous désignons par $F(z)$ la fonction limite, on aura $F(z) = f(z)$ d'abord pour $|z| < 1$ en vertu du théorème de M. *Carathéodory*, par conséquent aussi pour $|z| = 1$, car les fonctions $F(z)$ et $f(z)$ sont continues dans le domaine fermé $|z| \leqq 1$. C'est dire que la suite $\overline{f_n}(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ pour $|z| \leqq 1$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $\overline{M_n}$ reste $\geqq \delta > 0$. On a donc bien $M_n \to 0$, c. qu. f. d

2. Pour simplifier les considérations suivantes nous énoncerons d'abord quelques définitions.

Soit σ un arc simple de Jordan, A et B les extrémités de cet arc, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \ldots$ une suite de tels arcs, A_n et B_n les extrémités de σ_n. Nous écrirons $\sigma_n \to \sigma$ si $A_n \to A$, $B_n \to B$ et si la condition suivante est satisfaite: $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ étant une suite de points quelconque, telle que P_n est situé sur σ_n, tous les points limites de cette suite sont situés sur σ.

Considérons maintenant les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \ldots; \Gamma$. Nous déterminons ces courbes par des équations $x = \lambda_n(z)$, $x = \lambda(z)$, où les fonctions λ sont définies et continues sur la circonférence $|z| = 1$ et la représentent d'une manière biunivoque et continue sur les courbes respectives. De la définition même de l'écart il résulte: si l'écart des courbes Γ_n et Γ converge vers zéro, il est possible de choisir les fonctions $\lambda_n(z)$ de sorte que $\lambda_n(z) \to \lambda(z)$ uniformément sur la circonférence unité. En partant de cette remarque, le lecteur démontrera sans peine les faits suivants.

Nous supposons donc que l'écart des courbes Γ et Γ_n converge vers zéro. Tout d'abord, la condition *(C)* de l'introduction sera vérifiée, c'est-à-dire: $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ étant une suite de points telle que P_n est situé sur Γ_n, tous les points limites de cette suite sont situés sur Γ.

Soient maintenant A_n, B_n deux suites de points, où A_n et B_n sont situés sur Γ_n. Supposons que ces suites convergent: $A_n \to A$,

$B_n \to B$. Les points A et B sont alors situés sur Γ. Désignons par σ, τ les arcs déterminés sur Γ par les points A et B, et soient σ_n, τ_n les arcs déterminés sur Γ_n par les points A_n et B_n. On voit sans peine qu'il est possible de choisir les notations de sorte que $\sigma_n \to \sigma$, $\tau_n \to \tau$.

Ce sont les faits topologiques dont nous aurons besoin dans la suite. Nous aurons encore à faire usage d'une inégalité appartenant à la théorie des fonctions et dûe à M. *E. Lindelöf.*[6]) Soit O le centre d'un cercle k, dont la circonférence sera désignée par la même lettre. Soit de plus Σ un domaine contenu dans k et contenant le point O. Nous admettrons en outre qu'on peut trouver sur la circonférence de k un arc de longueur $\frac{k}{\nu}$ (ν entier positif) complètement extérieur à Σ. Considérons maintenant une fonction $\Phi(z)$ régulière en Σ. Soit $|\Phi(z)| < M$, et sur la partie de la frontière de Σ intérieure à k soit $|\Phi(x)| < m$. Dans ces conditions, on aura au centre de k l'inégalité

$$|\Phi(O)|^\nu < M^{\nu-1} m.$$

3. Nous pouvons maintenant établir le point le plus essentiel du raisonnement exposé dans l'introduction : *la continuité uniforme* de la suite $f_n(z)$ sur la circonférence $|z| = 1$. Supposons que la suite ne soit pas uniformément continue. On pourra alors déterminer sur la circonférence $|z| = 1$ deux suites de points z_n', z_n'', de sorte que pour une suite partielle[7]) de la suite $f_n(z)$ on ait

$$|f_n(z_n') - f_n(z_n'')| \geqq \Delta > 0,$$

tandis que $|z_n' - z_n''| \to 0$. Nous allons voir que cela conduit à une contradiction. Les points $A_n' = f_n(z_n')$, $A_n'' = f_n(z_n'')$ sont situés sur Γ_n et on peut admettre que les suites A_n', A_n'', z_n', z_n'' convergent:

$$A_n' \to A', \quad A_n'' \to A'', \quad z_n' = z_n'' \to$$

A' et A'' sont deux points distincts de la courbe limite Γ. Soient τ et σ les arcs déterminés sur Γ par les points A' et A'', et τ_n, σ_n les arcs déterminés sur Γ_n par les points A_n' et A_n''. Comme il a été remarqué au no 2, on pourra choisir les notations de sorte que $\tau_n \to \tau$, $\sigma_n \to \sigma$. Soient t_n, s_n les arcs de la circonférence unité qui correspondent à τ_n, σ_n par la fonction $f_n(z)$; ce

[6]) Cf. p. 7. du Mémoire cité sous [4]) de M. Lindelöf.

[7]) Nous désignerons toute suite partielle tirée de la suite $f_n(z)$ également par $f_n(z)$, pour ne pas compliquer les notations.

sont les arcs déterminés par les points z'_n, z''_n. Comme ces arcs convergent vers le même point ζ, on pourra extraire de l'une au moins des suites t_n, s_n une suite partielle convergeant vers ce point ζ. Nous pouvons donc admettre que p ex. $s_n \to \zeta$.

Désignons maintenant par $\varphi_n(x)$ la fonction inverse de $f_n(z)$ et posons $\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \zeta$. Soit en outre M_n le maximum du module de $\psi_n(x)$ sur l'arc σ_n. De $s_n \to \zeta$ il vient $M_n \to 0$. On a de plus $|\psi_n(x)| \leq |\varphi_n(x)| + |\zeta| \leq 2$.

Nous choisissons maintenant sur l'arc σ de la courbe Γ un point P différent de ses extrémités. A cause de $\tau_n \to \tau$ il y a tout au plus un nombre fini d'arcs τ_n passant par le point P, nous pouvons donc admettre que cela n'a pas lieu du tout. Comme $\tau_n \to \tau$, nous pouvons tracer autour du point P un cercle K n'ayant de point commun avec aucun des arcs $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n, \ldots; \tau$. Désignons par ϱ le rayon de K. Soit O un point intérieur à la fois à K et à Γ et tel que la distance OP soit $\leqq \frac{\varrho}{10}$. Autour de ce point O nous traçons un second cercle k de rayon $\frac{\varrho}{5}$. Ce cercle k sera contenu dans K et contiendra le point P, qui est situé sur Γ. On pourra par suite déterminer sur la circonférence de k un arc l de longueur $\frac{k}{\nu}$ (ν entier positif) complètement extérieur à Γ.

Pour n assez grand, le point O sera intérieur et l'arc l extérieur à Γ_n. Considérons alors l'ensemble des points intérieurs à la fois à k et à Γ_n. Cet ensemble est constitué par un ou plusieurs domaines connexes; soit Σ_n celui de ces domaines qui contient le point O. La partie de la frontière de Σ_n intérieure à k provient de la courbe Γ_n et justement de l'arc σ_n de cette courbe, car l'arc τ_n est complètement extérieur à k. Sur cette partie de la frontière de Σ_n on a donc $|\psi_n(x)| \leqq M_n$, ailleurs $|\psi_n(x)| \leqq 2$, et sur k nous avons l'arc l de longueur $\frac{k}{\nu}$ extérieur à Σ_n. Nous avons donc en vertu de l'inégalité de M. *Lindelöf:*

$$|\psi_n(O)|^\nu \leqq 2^{\nu-1} M_n.$$

Par conséquent la suite $\psi_n(x)$ converge vers zéro au point O.

Ceci posé, soit π un petit cercle contenu à l'intérieur de Γ, et tel que pour tout point Q intérieur à π on ait $OQ < \frac{\varrho}{10}$; à l'intérieur de π la suite $\psi'_n(x)$ converge vers zéro. Soit de plus γ une courbe de Jordan intérieur à Γ et contenant . cercle π et le point $x=0$ à son intérieur. Pour n assez grand, γ sera intérieur à Γ'_n. Dés lors la suite $\psi_n(x)$ est régulière et uniformément bornée ($|\psi'_n(x)| \leqq 2$) à l'intérieur de γ, et à l'intérieur de π cette suite converge vers zéro, comme nous venons de le voir. En vertu d'un théorème bien connu de *Stieltjes* cette suite convergerait vers zéro en tout point intérieur à γ. Or ceci n'a évidemment pas lieu pour le point $x=0$, car $|\psi'_n(0)| = |\varphi_n(0) - \zeta| = |\zeta| = 1$. Voilà la contradiction annoncée.

Einige Sätze über Kegelschnitte.

Von L. KLUG in Budapest.

In seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage gibt *v. Staudt* in No. 389 einen forcierten Beweis des Satzes No. 3 dieser Note. *Th. Reye* hält in seiner Geometrie der Lage (I. Abt. V. Aufl. 1909. p. 235) den Beweis dieses Satzes für „recht schwierig" und unterdrückt ihn.

Ich will nun hier einen leicht überblickbaren Beweis des Satzes geben, indem ich mich auf folgende zwei Hilfssätze stütze:

1. *Schreibt man von zwei perspektiven Dreiecken derselben Ebene dem ersten einen Kegelschnitt ein, so treffen die aus den Eckpunkten des zweiten Dreieckes ausstrahlenden Tangentenpaare des Kegelschnitts die Gegenseiten der entsprechenden Eckpunkte des ersten Dreieckes in drei Punktpaaren, welche einem Kegelschnitt angehören.*

Beweis. Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei perspektive Dreiecke derselben Ebene und $k^{(2)}$ ein dem ersten einbeschriebener Kegelschnitt, und die aus den Eckpunkten A', B' und C' ausstrahlenden Tangentenpaare desselben mögen bzw. die Seiten BC, CA und AB in den Punktpaaren A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 treffen.

Da die Dreiecke $A'A_1A_2$, $B'B_1B_2$ dem Kegelschnitt $k^{(2)}$ umschrieben sind, so liegen ihre Eckpunkte auf einem Kegelschnitt $l^{(2)}$, und die Tangente BC von $k^{(2)}$ trifft daher $l^{(2)}$ in solchen zwei Punkten MN, dass sich die aus ihnen ausstrahlenden zweiten Tangenten von $k^{(2)}$ in einem Punkte L von $l^{(2)}$ treffen.

$k^{(2)}$ und $l^{(2)}$ sind Polarfiguren von einander in Bezug auf einen Kegelschnitt, von welchem $A'A_1A_2$ $B'B_1B_2$ und LMN Polardreiecke sind; also ist A', B' und L bzw. der Pol der Seiten $BC = A_1A_2$, $CA = B_1B_2$ und $AB = MN$, und somit liegen die Dreiecke ABC, $A'B'L$ perspektiv. Da aber der Annahme nach auch die Dreiecke

ABC, $A'B'C'$ perspektiv sind, so ist C' ein Punkt der Geraden CL, und mithin treffen die aus C, L und C' ausstrahlenden Tangenten von $k^{(2)}$ die Tangente AB von $k^{(2)}$ in zugeordneten Punktpaaren AB, MN und C_1C_2 einer Involution. Weil nun die Kegelschnitte des Büschels $(A_1A_2B_1B_2)$ die Seite AB in der nämlichen Involution treffen, so gehört C_1C_2 einem Kegelschnitt des Büschels an, und das wollten wir eben beweisen.

2. *Zwei Kegelschnitte $k'^{(2)}$, $k^{(2)}$ derselben Ebene können immer als Polarfiguren betrachtet werden in Bezug auf einen dritten Kegelschnitt $\pi^{(2)}$. Die aus den Punkten des ersten Kegelschnitts ausstrahlenden Tangenten des zweiten treffen ihre Polaren bezüglich des dritten Kegelschnitts in Punktpaaren, welche einem Kegelschnitt angehören.*

Beweis. Ist $A'B'C'$ ein dem Kegelschnitt $k'^{(2)}$ einbeschriebenes Dreieck, so ist seine Polarfigur abc bezüglich $\pi^{(2)}$ dem Kegelschnitt $k^{(2)}$ umschrieben und mit dem ersten Dreieck perspektiv, daher treffen nach Hilfssatz 1 die aus A', B' und C' ausstrahlenden Tangenten von $k^{(2)}$ ihre Polaren a, b und c bezüglich $\pi^{(2)}$ in drei Punktpaaren A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 eines Kegelschnitts $\varkappa^{(2)}$

Der Pol D' der Tangente $d = C'C_2$ von $k^{(2)}$ bezüglich $\pi^{(2)}$ ist ein Treffpunkt von $c = C_1C_2$ und $k'^{(2)}$, und wenn die aus D' ausstrahlende zweite Tangente e von $k^{(2)}$ diese Polare $d = C'C_2$ im Punkte D_2 trifft, so liegen die Punktpaare A_1A_2, B_1B_2 und C_2D_2 ebenfalls auf einem Kegelschnitt nach 1. Dieser hat aber mit $\varkappa^{(2)}$ fünf Punkte gemein, somit fällt auch der Punkt D_2 auf $\varkappa^{(2)}$

Der Pol E' der Tangente $e = D'D_2$ von $k^{(2)}$ bezüglich $\pi^{(2)}$ ist der zweite Treffpunkt der Tangente $d = C'C_2D_2$ mit $k'^{(2)}$, und die aus E' ausstrahlende zweite Tangente f von $k^{(2)}$ trifft $e = D'D_2$ in einem Punkte E_2 des Kegelschnitts $\varkappa^{(2)}$. Denn die Polaren der Punkte A', B' und E' bezüglich $\pi^{(2)}$ treffen die aus jenen Punkten ausstrahlenden Tangenten von $k^{(2)}$ in den Punkten $A_1A_2B_1B_2D_2E_2$, von welchen die ersten fünf auf $\varkappa^{(2)}$ liegen, somit auch der sechste.

Ebenso ist der Pol F' der letzteren Tangente $f = E'E_2$ von $k^{(2)}$, der zweite Treffpunkt von $e = D'D_2E_2$ mit $k'^{(2)}$ und die aus F' ausstrahlende zweite Tangente g von $k^{(2)}$ trifft $f = E'E_2$ in einem Punkte $F^{(2)}$ des Kegelschnitts $\varkappa^{(2)}$ Schliesslich ist der Pol G' der letzteren Tangente $g = F'F_2$ von $k^{(2)}$ der zweite Treffpunkt von $f = E'E_2F_2$ und $k'^{(2)}$, und die aus G' ausstrahlende zweite Tangente h von $k^{(2)}$ trifft $g = F'F_2$ in einem Punkte G_2 von $\varkappa^{(2)}$

Daraus ersehen wir, dass die aus den Punkten A', B', C', E' und G' von $k'^{(2)}$ ausstrahlenden Tangentenpaare des Kegelschnitts $k^{(2)}$ ihre Polaren a, b, c, e und g bezüglich $\pi^{(2)}$, die Tangenten von $k^{(2)}$ sind, in den Punktpaaren $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_2 E_2$ und $F_2 G_2$ treffen, welche auf dem Kegelschnitt $\varkappa^{(2)}$ liegen. Dieser ist aber durch die drei letzteren Punktpaare schon bestimmt und unabhängig von den zwei ersteren, also auch von den Punkten A', B'. Hätten wir also anstatt A', B' zwei andere Punkte X', Y' auf $k'^{(2)}$ angenommen, so wäre $x y c$ die Polarfigur des Dreieckes $X' Y' C'$, und wir hätten aus diesem in derselben Weise die Punkte $C_1 C_2 D_2 E_2 F_2 G_2$ abgeleitet, welche den Kegelschnitt $\varkappa^{(2)}$ bestimmten. Da nun die aus den zwei beliebigen Punkten $X' Y'$ von $k'^{(2)}$ ausstrahlenden Tangentenpaare von $k^{(2)}$, ihre Polaren $x y$ bezüglich $\pi^{(2)}$ ebenfalls in zwei Punktpaaren von $\varkappa^{(2)}$ treffen — so ist der Satz bewiesen.

3. *Sind $k^{(2)}$ und $k_1^{(2)}$ zwei Kegelschnitte derselben Ebene, so ist der Ort der Punkte, aus welchen die zu $k^{(2)}$ und $k_1^{(2)}$ ausstrahlenden Tangentenpaare einander harmonisch trennen, ein Kegelschnitt.*

B e w e i s. Ist A' der Pol einer Tangente a von $k^{(2)}$ bezüglich $k_1^{(2)}$ und treffen die aus A' ausstrahlenden Tangenten des Kegelschnitts $k^{(2)}$ die Tangente a in den Punkten $A_1 A_2$, so sind diese schon Punkte des gesuchten Ortes. Denn es sind z. B. die Tangenten $A_1 A'$ und $a = A_1 A_2$ von $k^{(2)}$ konjugierte Polaren von $k_1^{(2)}$ und werden daher von den aus A_1 ausstrahlenden Tangenten dieses Kegelschnitts harmonisch getrennt.

Nun ist der Ort der Punkte A' der Polarkegelschnitt $k'^{(2)}$ von $k^{(2)}$ bezüglich $k_1^{(2)}$, daher ist der Ort der Punkte $A_1 A_2$ nach Hilfssatz 2 ein Kegelschnitt $\varkappa^{(2)}$.

Die Umkehrung des Satzes No. 2 können wir so aussprechen:

Liegen zwei Eckpunkte der einem Kegelschnitt ($k^{(2)}$) umschriebenen veränderlichen Dreiecke ($A' A_1 A_2$) auf einem Kegelschnitt ($\varkappa^{(2)}$), so liegt der dritte Eckpunkt ebenfalls auf einem Kegelschnitt ($k'^{(2)}$).

In derselben Weise, wie die Punkte des im Satze No. 3 erklärten Ortes, können auch die Strahlen gefunden werden, welche die Eigenschaft haben, dass die aus ihnen zu zwei Flächen II. O. geführten Berührungsebenen einander harmonisch trennen.

Sind nämlich $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ zwei Flächen II. O., α eine Berührungsebene von $F^{(2)}$ und A' ihr Pol bezüglich $F_1^{(2)}$, so ist jede durch A gelegte Berührungsebene von $F^{(2)}$ konjugierte Polarebene zu α bezüglich $F_1^{(2)}$, also ist ihre Spur auf der Ebene α ein Strahl g von der gewünschten Eigenschaft. Da die durch A' gehenden Berührungsebenen von $F^{(2)}$ die Berührungsebene α in einem Strahlenbüschel II. O. treffen, so ist der Ort in α und ebenso in jeder Berührungsebene von $F^{(2)}$, so wie auch in den Berührungsebenen $F_1^{(2)}$ liegenden Strahlen g, ein Strahlenbüschel II. O.

Um aber die durch einen beliebigen Punkt P gehenden Strahlen g des Ortes zu bestimmen bezeichne $P^{(2)}$ den aus P der Fläche $F^{(2)}$ umschriebenen Kegel und $\pi^{(2)}$ sei sein Polarkegelschnitt bezüglich $F_1^{(2)}$. Die aus einem Punkt A' von $\pi^{(2)}$, also auch durch die Gerade PA', zum Kegel $P^{(2)}$ geführten zwei Berührungsebenen treffen seine Polarebene α bezüglich $F_1^{(2)}$ in zwei Strahlen des Ortes, welche in einer Berührungsebene von $P^{(2)}$ liegen und also durch P gehen. Die zwei Strahlen liegen aber auf einem Kegel II. O., wie dies aus No. 2 folgt, wenn man den Satz auf zwei konzentrische Kegel II. O. überträgt.

Nachdem nun nachgewiesen wurde, dass die Strahlen g in den ∞^2 Berührungsebenen der angenommenen zwei Flächen II. O. Strahlenbüschel II. O. bilden und die durch einen beliebigen Punkt P gehenden Strahlen g die Erzeugenden eines Kegels II. O. sind, so folgt, dass der Ort dieser Strahlen g ein Komplex II. O. $\Gamma^{(2)}$ ist.

In jeder gemeinsamen Berührungsebene α der zwei Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ zerfällt der Strahlenbüschel II. O. des Komplexes in zwei Strahlenbüschel I. O. (A, α) und (A_1, α), deren Scheitel A und A_1 die Berührungspunkte sind von α mit den zwei Flächen. Der Ort der Scheitel dieser Strahlenbüschel I. O. ist daher die Berührungskurve der den Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ umschriebenen abwickelbaren Fläche, der Ort dieser Ebenen ist aber diese abwickelbare Fläche selbst. Wir können daher sagen:

Der Ort der Strahlen, aus welchen die zu zwei Flächen II. O. geführten Berührungsebenen einander harmonisch trennen, ist ein Komplex II. O. In jeder gemeinsamen Berührungsebene der Flächen bilden die Strahlen des Komplexes zwei Strahlenbüschel I. O., deren Scheitel die Berührungspunkte der betreffenden Ebenen sind. Der Komplex geht durch die zwei Flächen II. O., wenn dieselben Regelflächen sind.

* * *

Im folgenden geben wir einen Beitrag zur Theorie der Kegelschnitte, die einen Kegelschnitt doppelt berühren.

1. *Hat eine Gerade denselben Pol in Bezug auf drei Kegelschnitte, die keinem Büschel angehören, so bilden die aus diesem Pol ausstrahlenden Sehnenpaare der Kegelschnittpaare eine Involution.*

Es seien $k^{(2)}$, $l^{(2)}$ und $m^{(2)}$ die drei Kegelschnitte; kk', ll' und mm' die aus dem gemeinsamen Pol X ausstrahlenden Sehnenpaare von $l^{(2)} m^{(2)}$, $m^{(2)} k^{(2)}$ und $k^{(2)} l^{(2)}$; endlich seien M und M' die auf den Sehnen m und m' liegenden Punkte der Kegelschnitte $k^{(2)} l^{(2)}$.

Begegnet nun die Verbindungsgerade g der Punkte MM' den Sehnenpaaren kk', ll' in den Punktpaaren KK', LL', und dem Kegelschnitt $m^{(2)}$ oder irgend einem Kegelschnitt $m^{(2)}$ der Büschel $(m^{(2)} l^{(2)})$, $(m^{(2)} k^{(2)})$ in dem Punktpaar NN', so bilden nach *Desargues* die Punktpaare $NN'.MM'.KK'$ und die Punktpaare $NN'.MM'.LL'$ als Treffpunkte von $m^{(2)}$, $l^{(2)}$ und kk', bzw. von $m^{(2)}$, $k^{(2)}$ und ll' mit g, je eine Involution. Da nun diese zwei gemeinsame zugeordnete Punktpaare haben, gehören die Punktpaare KK', LL' und MM' derselben Punktinvolution, also die Sehnenpaare kk', ll' und mm', welche diese aus X projicieren derselben Strahleninvolution an, was wir eben beweisen wollten.

Bei diesem Beweis haben wir vorausgesetzt, dass sich zwei der Kegelschnitte (hier $k^{(2)}$ und $l^{(2)}$) in vier reellen Punkten treffen, von welchen wir die zwei M und M' durch eine reelle Gerade g verbunden haben. Wir werden aber bald sehen, dass der Satz auch dann richtig ist, wenn die Kegelschnitte gar keine reelle gemeinsame Punkte haben.

2. *Hat eine Gerade x denselben gemeinsamen Pol X in Bezug auf einen Kegelschnitt $m^{(2)}$ und alle Kegelschnitte*

eines Büschels, so hat $m^{(2)}$ mit jedem Kegelschnitt des Büschels zwei sich in jenem Pol X treffende gemeinsame Sehnen, welche eine Strahleninvolution bilden.	*einer Schaar, so hat $m^{(2)}$ mit jedem Kegelschnitt der Schaar zwei auf jener Geraden x liegende Kontingenzpunkte, welche eine Punktinvolution bilden.*

Nachdem nämlich $m^{(2)}$ und ein beliebiger Kegelschnitt $k^{(2)}$ des Büschels, sowie jeder veränderliche Kegelschnitt $l^{(2)}$ des Büschels solche drei Kegelschnitte sind, deren im gemeinsamen Pol X zusammenstossende Sehnenpaare eine Involution bilden, und von diesen ein Sehnenpaar zum Kegelschnittbüschel, ein zweites zu den Kegelschnitten $m^{(2)} k^{(2)}$, das dritte aber, das zu $m^{(2)} l^{(2)}$ gehörige, veränderlich ist, so bilden diese letzteren ein involutorisches Strahlenbüschel, welches schon von den zwei ersteren Sehnenpaaren bestimmt ist.

Dieser Beweis, der sich auf den früheren Satz stützt, setzt voraus, dass es im Kegelschnittbüschel (mindestens) einen Kegelschnitt $k^{(2)}$ gibt, welcher $m^{(2)}$ in vier reellen Punkten schneidet, von welchen zwei, die nicht auf einer durch X gehenden Sehne liegen, miteinander durch eine reelle Gerade g verbunden werden können. Sonst aber ist für den Beweis des Satzes nicht nötig, dass die Kegelschnitte des Büschels selbst mit dem Kegelschnitt $m^{(2)}$ reelle gemeinsame Punkte haben.

Daraus folgt aber, das Satz 1 auch dann richtig ist, wenn die drei angenommenen Kegelschnitte paarweise keine reellen Schnittpunkte haben. Und dies vorausgesetzt ergibt sich schliesslich, dass auch der Satz 2 von der Realität der gemeinsamen Punkte der Kege'schnitte $k^{(2)}$ und $m^{(2)}$ unabhängig, d. h. allgemein gültig ist.

3. *Hat eine Gerade denselben Pol in Bezug auf den Kegelschnitt $m^{(2)}$ und in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels (einer Schaar), so gibt es im letzteren zwei Kegelschnitte, welche $m^{(2)}$ doppelt berühren.*

Die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels, den die aus X ausstrahlenden gemeinsamen Sehnen von $m^{(2)}$ und mit den Kegelschnitten des Büschels bilden, sind die Berührungssehnen der zwei Kegelschnitte des Büschels, welche $m^{(2)}$ doppelt berühren.

Daraus ergibt sich der bekannte *Chasles*'sche Satz: „Haben zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung mit einem dritten, so trennen die zwei Berührungssehnen zwei ihrer gemeinsamen Sehnen harmonisch."

Aus dem 3. Satz folgt eine Konstruktion für die durch drei Punkte A, B und C gehenden (oder drei Gerade berührenden) Kegelschnitte, welche einen Kegelschnitt $m^{(2)}$ doppelt berühren.

Auf der Geraden BC bestimmt man die zwei konjugierten Pole XY von $m^{(2)}$, welche BC harmonisch trennen; ist dann D der Punkt, welcher A von X und seiner durch Y gehenden Polare bezüglich $m^{(2)}$ harmonisch trennt, so sind die zwei Kegelschnitte des Büschels mit den Grundpunkten $ABCD$, die $m^{(2)}$ doppelt berühren, die gewünschten.

Um die Berührungssehnen derselben mit $m^{(2)}$ zu finden, sucht man das durch X (oder Y) gehende Sehnenpaar ll' von $m^{(2)}$ mit einem Kegelschnitt des Büschels, z. B. mit dem Geradenpaar AB, CD; die Verbindungsgeraden der Treffpunkte der Geraden AB und $m^{(2)}$ mit X geben ein solches Sehnenpaar ll'. Da nun die gewünschten Berührungssehnen XA, XB und l, l' harmonisch trennen, so liegen auf ihnen diejenigen konjugierten Pole Z, U von $m^{(2)}$, welche AB harmonisch trennen. Es sind daher XZ, XU und YZ, YU die gewünschten vier Berührungssehnen der durch ABC gehenden Kegelschnitte, welche $m^{(2)}$ doppelt berühren, — also die bekannte Konstruktion der Berührungssehnen.

Sind von den drei gegebenen Punkten A reell, BC aber die Doppelpunkte einer auf der Geraden g liegenden elliptischen Involution I, so bestimme man in I dasjenige zugeordnete Punktpaar XY, welches ein konjugiertes Polenpaar ist von $m^{(2)}$. Trennt dann der Punkt D den Punkt A von X und seiner Polare x bezüglich $m^{(2)}$ harmonisch, so sucht man wie oben in dem Kegelschnittbüschel $ABCD$ diejenigen zwei Kegelschnitte, welche $m^{(2)}$ doppelt berühren. Die aus X ausstrahlenden gemeinsamen Sehnen ll' von $m^{(2)}$ mit einem Kegelschnitt des Büschels, sowie XAD und $XY = g$ sind zwei zugeordnete Strahlen einer Involution, deren Doppelstrahlen die Berührungssehnen der gesuchten Kegelschnitte mit $m^{(2)}$ bestimmen.

Unter den Kegelschnitten des Büschels gibt es einen, dessen durch X (oder Y) gehende gemeinsame Sehnen mit $m^{(2)}$ in besonderer Weise gefunden werden können. Im Strahlenbüschel der konjugierten Polaren bezüglich $m^{(2)}$ vom Scheitel A gibt es nämlich ein Paar, welches durch ein zugeordnetes Punktpaar PQ der gegebenen Involution I geht. Dieses trifft x in dem Punktpaar EF, welches auf einem Kegelschnitt $k^{(2)}$ des Büschels liegt.

Da nämlich die Punkte AD von X und x harmonisch getrennt sind, so sind es auch die Strahlen EA, ED, so wie auch FA, FD; es treffen daher die Strahlen ED und FD die Gerade g in zwei Punkten P' und Q', die von P, bzw. Q durch XY harmonisch getrennt sind, d. h. $(XYPP') = (XYQQ') = -1 = (YXQQ')$. Daraus folgt aber, dass $XY . PQ . P'Q'$ zugeordnete Punkte der gegebenen Involution I sind, und daher gehen die Strahlen ED, FD ebenfalls durch zugeordnete Punkte P', Q' derselben. Der durch die fünf Punkte $ABCEF$ gelegte Kegelschnitt $k^{(2)}$ trägt daher auch den Punkt D und gehört somit dem Büschel an.

Da die Strahlen AP, AQ bezüglich $m^{(2)}$ konjugierte Polaren sind, so geben ihre Treffpunkte M, N mit der Polaren a von A bezüglich $m^{(2)}$, die Pole von AQ und AP; und XM und XN sind dann ein Paar gemeinsame Sehnen von $m^{(2)}$ und $k^{(2)}$.

Denn der Strahl XM trifft AMP und ANQ in konjugierten Polen bezüglich $k^{(2)}$ (weil AEF ein dem $k^{(2)}$ einbeschriebenes Dreieck und X der Pol der Seite EF ist), dann in konjugierten Polen bezüglich $m^{(2)}$ (da M der Pol der Geraden AQ ist); zugleich ist auch sein Treffpunkt mit x der konjugierte Pol von X in Bezug auf beide Kegelschnitte. Dasselbe kann man auch sagen vom Strahl XN, — also sind diese Strahlen die gemeinsamen Sehnen von $m^{(2)}$ und $k^{(2)}$. Daraus folgt die Konstruktion, die *F. Hofmann* in seinem Buche („Die Construction doppelt berührender Kegelschnitte", 1886. *Teubner*, p. 30) angibt, aus dem Satze 3 und die etwa so lautet: Um die Berührungssehnen eines Kegelschnitts $m^{(2)}$ mit den durch den reellen Punkt A und durch die konjugiert-imaginären Doppelpunkte einer elliptischen Involution I gehenden Kegelschnitte zu bestimmen, schneidet man die Polare a des Punktes A bezüglich $m^{(2)}$ in den Punkten M, N mit denjenigen aus A ausstrahlenden konjugierten Polaren von $m^{(2)}$, welche die Involution I in zugeordneten Punkten treffen. Sind dann XY diejenigen zugeordneten Punkte von I, welche zugleich konjugierte Pole sind von $m^{(2)}$, so geben XM, XN und XA, XY, so wie auch YM, YN und YA, YX zwei zugeordnete Strahlen je einer Involution, von welchen die eine hyperbolisch, die andere elliptisch ist; die Doppelstrahlen der ersteren sind die Berührungssehnen der gewünschten Kegelschnitte mit $m^{(2)}$.

Wir bemerken nochmals, dass diese von *Hofmann* stammende und auf eine andere Weise bewiesene Konstruktion aus dem 3. Satz folgt, nach welchem man irgend eine durch X gehende Gerade XHJ, welche den Punkt X mit einem Punkt H von $m^{(2)}$ verbindet als Sehne l benützen kann; der zweite Treffpunkt J von XH mit $m^{(2)}$ trennt X, x von H harmonisch. Die zweite durch X gehende Sehne l' von $m^{(2)}$ und dem Kegelschnitt $ABCHJ$ des Büschels wird entweder nach dem Desargues'schen Satz oder dadurch bestimmt, dass sie l von irgend einem Paar konjugierter Pole dieser Kegelschnitte harmonisch trennt; endlich trennen die Berührungssehnen der gesuchten Kegelschnitte XA, XY und l, l' harmonisch.

Bemerkungen zur Theorie der Differente.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

1. Es sei in einem algebraischen Zahlkörper K für die Primzahl p

$$p = \mathfrak{p}^g \mathfrak{q}\ ,\ (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1,$$

wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal r-ten Grades ist und noch die Relationen

$$g = p^s g',\ (p, g') = 1$$

gelten. Ist die Differente des Körpers genau durch $\mathfrak{p}^{v-1}$ teilbar, dann ist im Falle $s = 0$, $v = g$; fällt aber $s > 0$ aus, so wird

(1) $$g + 1 \leqq v \leqq (s+1) g.$$

Die obere Schranke kann in der Tat für jeden Wert von s und r bei geignet gewählten Körpern erreicht werden.[1])

2. Wie verhält sich die untere Schranke? Für Galoissche Körper ist nach *Hilbert*.[2])

$$v - 1 \geqq g - p^s + 2(p^s - 1) \geqq g + p^s - 2,$$

also wird

$$v > g + 1,$$

ausgenommen den Fall $p^s = 2$. Ich werde jedoch beweisen, dass die untere Schranke für jeden Wert von s und r auftreten kann. Es sei

(2) $$F(x) = f^g(x) + p\, M(x)\ ,\ F(w) = 0,$$

wo

$$f(x) = x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r$$

ein ganzzahliges (mod. p) irreduzibles Polynom ist und das ganzzahlige Polynom $M(x)$ relativ prim gegen $f(x)$ (mod. p) ausfällt, der Grad von $M(x)$ soll kleiner als rg sein. In dem durch w

---

[1]) Vgl. meine Arbeit: Verschiedene Bemerkungen über die Differente etc. Math. Zeitschrift Bd. 16 (1923). S. 4.

[2]) *Hilbert:* Die Theorie der alg. Zahlkörper § 47. Jahresbericht der D. M. Vereinigung. Bd. 4 (1897).

erzeugten Körper $K(w)$ sind $p = \mathfrak{p}^g$, $\mathfrak{p}$ ein Primideal r-ten Grades, $\frac{f^g(w)}{p}$ eine ganze Zahl, $\left(\frac{f^g(w)}{p}, p\right) = 1$. Die Differente der Zahl w, mithin die Zahl $F'(w)$ enthält genau dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$, wie die Körperdifferente. Wählt man

(2*) $$M(x) \equiv m\,(x + R) \pmod{p},$$

wo $x + R$ relativ prim gegen $f(x) \pmod{p}$ ist und m eine gegen p relativ prime rationale ganze Zahl bedeutet, so enthält die Zahl

$$F'(w) \equiv g\, f^{g-1}(w)\, f'(w) + p\, m \pmod{p^2}$$

genau die Potenz $\mathfrak{p}^g$, es ist daher $v = g + 1$.

3. Werden nur Galoissche Körper betrachtet, so hat man (vgl. die Arbeit[1]) im Falle $sg \not\equiv 0 \pmod{(p-1)}$, die Relation

(3) $$g + p^s - 1 \leqq v \leqq (s+1)\, g - 1.$$

Für den speziellen Fall $g = p > 2$, werden beide Schranken einander gleich und man bekommt $v = 2p - 1$. Diese Formel enthält einen bekannten Satz über Abelsche Körper. Zum Beweise kann man auch die von *H. Speiser*[3]) gegebene obere Schranke der sog. *Hilbert*schen Zahlen verwenden.

4. Der Zusammenhang zwischen der Differente $\vartheta = (\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)}) \ldots (\Theta^{(1)} - \Theta^{(n)})$ einer primitiven ganzen Zahl Θ des Körpers $K(w)$ und der Körperdifferente wird durch den folgenden *Dedekind*schen Satz geliefert:

(4) $$\vartheta = \mathfrak{f}\, \mathfrak{f},$$

---

[3]) *Speiser:* Die Zerlegungsgruppe. Journal für Math. Bd. 149 (1919), S. 183. Will man bei den Beweisen der Sätze des § 3. (a. a. O. S. 180—184) die Anwendung der Theorie der Matrizen vermeiden, so kann man die folgenden Identitäten benützen. Ist π eine genau durch $\mathfrak{p}$ teilbare ganze Zahl und bedeuten S, $\bar S$ beliebige Substitutionen der Körpergruppe, dann ist $S\varphi - \varphi - (\bar S \bar\varphi - \bar\varphi) = \bar S S \pi - S \bar S \pi$, wo $\varphi = \bar S \pi - \pi$, $\bar\varphi = S\pi - \pi$ ausfallen. Für die m-te Iteration von S, gilt die Relation:

$$S^m \pi = \pi + \sum_{h=1}^{m} \binom{m}{h} (S\pi - \pi)^{(h)}.$$

Diese Identitäten werden noch durch die Formeln ergänzt: Aus

$$S\pi \equiv \pi + \alpha\, \pi^{i+1} + \ldots \pmod{\mathfrak{p}^l}, \quad \bar S \pi \equiv \pi + \beta\, \pi^{k+1} + \ldots \pmod{\mathfrak{p}^l}$$

folgen

$$(S\pi - \pi)^{(h)} \equiv (i+1)\,(2i+1) \ldots (\overline{h-1}\, i + 1)\, \alpha^h\, \pi^{hi+1} \pmod{\mathfrak{p}^l},$$

$$S\varphi - \varphi \equiv (k+1)\, \beta\, \alpha\, \pi^{i+k+1} + \ldots \pmod{\mathfrak{p}^l},$$

$$\bar S \bar\varphi - \bar\varphi \equiv (i+1)\, \alpha\, \beta\, \pi^{i+k+1} + \ldots \pmod{\mathfrak{p}^l}.$$

Hier bedeuten S, $\bar S$ Substitutionen der Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{p}$ und $\alpha, \beta, \ldots$ ganze Zahlen des Trägheitskörpers.

wo $\mathfrak{f}$ den Führer des Systems $[1, \Theta, \Theta^2, \ldots, \Theta^{n-1}]$, also ein von Θ abhängiges Ideal und $\mathfrak{j}$ ein nur vom Körper abhängiges Ideal bezeichnet, welches gleich der Körperdifferente ausfällt.[4])

Wir wollen im Folgenden eine möglichst einfache und direkte Anordnung des *Dedekind*schen Beweises geben.

5. Bilden $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen des Körpers $K(w)$, so wird der Führer $\mathfrak{f}$ als die Gesamtheit der Zahlen γ definiert, welche die Relationen

$$(5) \qquad \gamma\, w_i = \sum_{h=1}^{n} r_{ih}\, \Theta^{h-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad r_{ih} \text{ rat.-ganz},$$

erfüllen. (Die Zahl γ ist also ganz und $\mathfrak{f}$ bildet ein Ideal.) Das komplementäre System von $[1, \Theta, \Theta^2, \ldots, \Theta^{n-1}]$ wird durch die Zahlen

$$\frac{\eta_0}{\vartheta}, \frac{\eta_1}{\vartheta}, \ldots, \frac{\eta_{n-1}}{\vartheta}$$

gegeben, wo

$$(x - \Theta^{(2)}) \ldots (x - \Theta^{(n)}) = \eta_{n-1}\, x^{n-1} + \eta_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots + \eta_0$$

ausfällt.[5]) Aus (5) folgt nach einem bekannten Satze über komplementäre Systeme[6])

$$(5^*) \qquad \frac{\eta_{i-1}}{\vartheta} = \sum_{h=1}^{n} r_{hi} \frac{\overline{w}_h}{\gamma}, \quad \gamma\, \eta_{i-1} = \sum_{h=1}^{n} r_{hi}\, \overline{w}_h\, \vartheta$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $[\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n]$ das komplementäre System des Fundamentalsystems bezeichnet. Da $\eta_{n-1} = 1$ ist, so erfüllen die Zahlen γ notwendig eine Relation

$$(5^{**}) \qquad \gamma = \sum_{h=1}^{n} c_h\, \vartheta\, \overline{w}_h\,, \quad c_h \text{ rat.-ganz.}$$

---

[4]) *Dedekind:* Über die Discriminanten endlicher Körper § 10. Abh. der Kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen Bd. 29 (1882). Reproduziert bei *Bachmann:* Zahlentheorie V. Teil (1905). S. 314 Andere Beweise: *Hilbert* a. a. O. § 32., *Landsberg*, Über Modulsysteme zweiter Stufe und Zahlenringe. Göttinger Nachrichten (1897), S. 277—303. Vgl. Abschnitt III. S. 292—298. — Es sei noch die schöne Darstellung im § 36. des während der Drucklegung erschienenen Buches, *E. Hecke:* Vorlesungen über die Theorie der alg. Zahlen, erwähnt. Der *Hecke*sche Beweis lässt sich leicht auf Relativkörper ausdehnen. (§ 38. a. a. O.) [Zusatz bei der Korrektur.]

[5]) *Dedekind* a. a. O. § 8. Punkt 11. Hier ist nur die Tatsache wichtig, dass die η_{i-1} ganze Zahlen des Körpers $K(w)$ sind und $\eta_{n-1} = 1$ ausfällt. Einen direkten Beweis bekommt man durch die bekannte Darstellung der Elemente des komplementären Systems mittels Determinantenbrüche.

[6]) *Dedekind* a. a. O § 8. Punkt 10.

Man kann beweisen, dass diese Relation für die Gestalt der eine genügende ist. Sei nämlich ζ eine beliebige ganze Zahl des Körpers $K(w)$, dann ist nach dem angeführten Satze über komplementäre Systeme:

$$\beta_i = w_i \zeta = \sum_{h=1}^{n} \varrho_{ih} w_h \qquad w_i \zeta = \sum_{h=1}^{n} \varrho_{hi} w_h$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n), \quad \varrho_{ih} \text{ rat.-ganz,}$$

also sind die Produkte $w_i \overline{w}_k$ homogene lineare Funktionen der Grössen w_i mit rational-ganzen Koeffizienten. Infolgedessen erhält man aus (5**) wieder die Relationen (5*) und (5). Ist D die Körperdiskriminante, dann sind die Zahlen $w_i \sqrt{D}$ ganze Zahlen und nach den Vorigen bilden die Zahlen $\overline{w}_i D$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ das Fundamentalsystem eines Ideals, welches durch $\mathfrak{z}$ bezeichnet werde. Aus (5**) erhält man:

$$D = \mathfrak{z}\,\vartheta,$$

da das Ideal D durch $\mathfrak{z}$ teilbar ist (weil $D = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{w}_i D$ ausfällt), wird[7])

$$D = \mathfrak{z}\,\mathfrak{j}\,, \quad \vartheta = \mathfrak{f}\,\mathfrak{j},$$

womit der Beweis geleistet ist. Da bei einer geigneten Wahl von Θ, $\mathfrak{f}$ nach *Dedekind* relativ prim gegen ein beliebig gegebenes Primideal ist,[8]) bildet das Ideal den grössten gemeinsamen Teiler der Differenten ϑ, folglich ist $\mathfrak{j}$ mit der Körperdifferente $\mathfrak{d}$ aequivalent.[9])

---

[7]) Hier wird erst der Hauptsatz der Idealtheorie angewendet.

[8]) Vgl. den vereinfachten Beweis bei *Hilbert* a. a. O. § 32.

[9]) Vgl. den direkten Beweis dieser Behauptung in meiner Arbeit I.) Ein indirekter Beweis, welcher den Norm-Begriff ausnützt, steht bei *Hilbert* a. a. O. gegen Ende des § 32.

Zur Einführung der transfiniten Zahlen

Von JOHANN v. NEUMANN in Budapest.

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist: den Begriff der *Cantor*schen Ordnungszahl eindeutig und konkret zu fassen.

Dieser Begriff wird nach *Cantors* Vorgang gewöhnlich als „Abstraktion“ einer gemeinsamen Eigenschaft aus gewissen Klassen von Mengen gewonnen.[1]) Dieses etwas vage Verfahren wollen wir durch ein anderes, auf eindeutigen Mengenoperationen beruhendes, ersetzen. Das Verfahren wird in den folgenden Zeilen in der Sprache der naiven Mengenlehre dargestellt werden, es bleibt aber (im Gegensatz zu *Cantors* Verfahren) auch in einer „formalistischen“, axiomatisierten Mengenlehre richtig. So behalten unsere Schlüsse auch im Rahmen der *Zermelo*schen Axiomatik (wenn man das *Fränkel*sche Axiom[2]) hinzufügt) volle Geltung.

Wir wollen eigentlich den Satz: „Jede Ordnungszahl ist der Typus der Menge aller ihr vorangehenden Ordnungszahlen“ zur Grundlage unserer Überlegungen machen. Damit aber der vage Begriff „Typus“ vermieden werde, in dieser Form: „Jede Ordnungszahl ist die Menge der ihr vorangehenden Ordnungszahlen.“ Dies ist kein bewiesener Satz über Ordnungszahlen, es wäre vielmehr, wenn die transfinite Induktion schon begründet wäre, eine Definition derselben. Nach ihr wird (O ist die leere Menge, $(a, b, c, \dots)$ die Menge mit den Elementen $a, b, c, \dots$)

$$0 = O,$$
$$1 = (O),$$
$$2 = (O, (O)),$$
$$3 = (O, (O), (O, (O))),$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\omega = (O, (O), (O, (O)), (O, (O), (O, (O))), \dots\dots),$$
$$\omega + 1 = (O, (O), (O, (O)), \dots\dots, (O, (O), (O, (O)) \dots\dots)),$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Wir setzen aber natürlich die transfinite Induktion nicht als begründet voraus, wir nehmen vielmehr nur die Begriffe der „wohlgeordneten Menge“ und der „Ähnlichkeit“ als vorhanden an.[1]) Wir werden im übrigen streng formalistisch vorgehen, das ... Symbol und ähnliches überall vermeiden.

Unsere Bezeichnungen sind die folgenden: Wenn Ξ, H Mengen sind, so bedeutet $\Xi \leqq H$ oder $H \geqq \Xi$, dass Ξ eine Teilmenge von H ist, und $\Xi < H$ oder $H > \Xi$, dass Ξ eine echte Teilmenge von H ist. Wenn Ξ eine Menge ist, so bedeutet $x \varepsilon \Xi$, dass x ein Element von Ξ ist. — O sei die leere Menge, a, (a, b), (a, b, c) die Mengen, deren Elemente a, a und b, bzw. a, b und c sind. Wenn x, y Elemente einer geordneten Menge sind, so bedeutet $x \prec y$ oder $y \succ x$, dass bei der gegebenen Ordnung x vor y kommt.

$E(x)$ sei eine Eigenschaft, $f(x)$ eine Funktion, die für alle x, die die Eigenschaft $E(x)$ besitzen, definiert ist. Dann sei

$$M(f(x);\ E(x))$$

die Menge aller $f(x)$, wenn x alle x, die die Eigenschaft $E(x)$ besitzen, durchläuft.[3]) — Ξ sei eine geordnete Menge, x ein Element von Ξ. Dann nennen wir die Menge

$$M(y;\ y \varepsilon \Xi,\ y \prec x)$$

aller Elemente y von Ξ, die vor x liegen, den Abschnitt von x in Ξ, und bezeichnen ihn kürzer auch durch $A(x, \Xi)$.

I. Kapitel.

1. Ξ sei eine wohlgeordnete Menge. Wir nennen eine Funktion $f(x)$, die in Ξ definiert ist, eine „Zählung“ von Ξ, wenn für alle Elemente x von Ξ

$$f(x) = M(f(y);\ y \varepsilon A(x, \Xi))$$

ist Wenn $f(x)$ eine Zählung von Ξ ist, so nennen wir

$$M(f(x);\ x \varepsilon \Xi)$$

eine „Ordnungszahl“ von Ξ. Und wenn es überhaupt Zählungen von Ξ gibt, so nennen wir Ξ „zählbar“.

Ist x_1, x_2, x_3, x_4 das 1-te, 2-te, 3-te, 4-te Element von Ξ, so ist offenbar für jede Zählung $f(x)$ von Ξ

$$f(x_1) = O,$$
$$f(x_2) = (O),$$
$$f(x_3) = (O, (O)),$$
$$f(x_4) = (O, (O), (O, (O)));$$

folglich ist die Ordnungszahl von Ξ, wenn es 0, 1, 2 oder 3 Elemente hat, bzw.

0,
(0),
(0, (0)),
(0, (0), (0, (0))).

2. Ξ sei eine wohlgeordnete Menge. Zwei Zählungen $f(x)$, $g(x)$ von Ξ sind stets identisch.

Denn im entgegengesetztem Falle gäbe es ein erstes x, für welches $f(x) \neq g(x)$ ist. Für alle $y \prec x$ wäre also $f(y) = g(y)$, also wäre

$$M(f(y);\ y \varepsilon \Xi,\ y \prec x) = M(g(y);\ y \varepsilon \Xi,\ y \prec x)$$

und das heisst eben $f(x) = g(x)$, entgegen der Annahme.

Ein zählbares Ξ hat also eine und nur eine Zählung. Zählung und Ordnungszahl sind also für alle zählbaren Ξ eindeutig festgelegte Begriffe. Wir werden im Folgenden die Ordnungszahl von Ξ mit $OZ(\Xi)$ bezeichnen.

3. Ξ sei zählbar, $f(x)$ die Zählung von Ξ, und $\bar{x}$ ein Element von Ξ. Dann ist $A(\bar{x}, \Xi)$ zählbar und seine Ordnungszahl ist $f(\bar{x})$.

Denn die Funktion $f'(x)$, die in $A(\bar{x}, \Xi)$ definiert und dort $= f(x)$ ist, ist eine Zählung von $A(\bar{x}, \Xi)$. Es ist in der Tat für alle Elemente y von $A(\bar{x}, \Xi)$

$$M(f'(y);\ y \varepsilon A(x, A(\bar{x}, \Xi))) = M(f(y);\ y \varepsilon A(x, A(\bar{x}, \Xi))) =$$
$$= M(f(y);\ y \varepsilon A(x, \Xi)) = f(x) = f'(x).$$

Also ist $A(\bar{x}, \Xi)$ zählbar, und seine Ordnungszahl ist

$$OZ(A(\bar{x}, \Xi)) = M(f'(x);\ x \varepsilon A(\bar{x}, \Xi)) =$$
$$= M(f(x);\ x \varepsilon A(\bar{x}, \Xi)) = f(\bar{x}).$$

4. Alle Abschnitte in Ξ seien zählbar. Dann ist auch Ξ zählbar.

Wir definieren nämlich für jedes x von Ξ

$$f(x) = OZ(A(x, \Xi)).$$

(Das können wir, da alle $A(x, \Xi)$ zählbar sind.) $f(x)$ ist dann eine Zählung von Ξ. Gehört nämlich x zu Ξ, und ist $\varphi(y)$ die Zählung von $A(x, \Xi)$, so ist für jedes Element y von $A(x, \Xi)$

$$\varphi(y) = OZ(A(y, A(x, \Xi))) = OZ(A(y, \Xi)) = f(y),$$

so dass

$$f(x) = OZ(A(x, \Xi)) = M(\varphi(y);\ y \varepsilon A(x, \Xi)) =$$
$$= M(f(y);\ y \varepsilon A(x, \Xi))$$

ist.

5. Ξ sei wohlgeordnet. Dann ist Ξ zählbar.

Denn im entgegengesetztem Falle wären auch nicht alle Abschnitte in Ξ zählbar. Es gäbe also ein erstes x, für welches $A(x, \Xi)$ nicht zählbar ist. Nun ist jeder Abschnitt in $A(x, \Xi)$ gleich

$$A(y, A(x, \Xi)) = A(y, \Xi)$$

für ein Element y von $A(x, \Xi)$. Wegen $y \prec x$ ist dann $A(y, \Xi)$ zählbar. Also sind alle Abschnitte in $A(x, \Xi)$ zählbar, d. h. $A(x, \Xi)$ ist zählbar, entgegen der Annahme.

Damit haben wir bewiesen, dass Zählung und Ordnungszahl für alle wohlgeordneten Mengen eindeutig festgelegte Begriffe sind.

II. Kapitel.

6. Ξ sei wohlgeordnet und $f(x)$ die Zählung von Ξ. Dann ist, für kein Element x von Ξ, $f(x)$ ein Element von $f(x)$.

Würde nämlich, für irgendein Element x von Ξ, $f(x)$ zu $f(x)$ gehören, so gäbe es ein erstes derartiges x. Da $f(x)$ die Menge aller $f(y)$ ist, wo $y \prec x$ ist, wäre dann $f(x) = f(y)$, für ein $y \prec x$. Dann würde aber $f(y)$ zu $f(y)$ gehören und $y \prec x$ sein, entgegen der Annahme.

7. Ξ sei wohlgeordnet, $f(x)$ die Zählung von Ξ, und x, y seien zwei Elemente von Ξ, für die $x \prec y$ ist. Dann ist $f(x) < f(y)$.

Aus $x \prec y$ folgt nämlich $A(x, \Xi) < A(y, \Xi)$, also

$$M(f(u);\, u \,\varepsilon\, A(x, \Xi)) \leqq M(f(u);\, u \,\varepsilon\, A(y, \Xi)),\ f(x) \leqq f(y),$$

und weil $f(x)$ zu $f(y)$ gehört (da $x \prec y$ ist), zu $f(x)$ aber nicht, so ist $f(x)$ von $f(y)$ verschieden. Also ist $f(x) < f(y)$.

8. Wir nennen, mit einem Ausdruck von *Hessenberg*, eine Menge von Mengen Ξ „durch Subsumption ordnungsfähig", wenn für zwei verschiedene Elemente x, y von Ξ stets $x < y$ oder $x > y$ ist. Und wenn das der Fall ist, so definieren wir eine Ordnung dadurch, dass wir festsetzen, dass $x \prec y$ sei, falls $x < y$ ist. Diese Ordnung nennen wir die „Subsumptionsordnung".

Nun sei Ξ wohlgeordnet. Dann ist $OZ(\Xi)$ stets durch Subsumption ordnungsfähig und in der Subsumptionsordnung dem Ξ ähnlich.

$f(x)$ sei nämlich die Zählung von Ξ. Irgend zwei Elemente P, Q von $OZ(\Xi)$ sind dann wegen

$$OZ(\Xi) = M(f(x);\, x \,\varepsilon\, \Xi)$$

gleich $f(x)$, bzw. $f(y)$. Und da $x \prec y$ oder $x \succ y$ ist, ist $f(x) < f(y)$

oder $f(x) > f(y)$, also $P < Q$ oder $P > Q$. Also ist $OZ(\Xi)$ durch Subsumption ordnungsfähig.

Die Zuordnung von x zu $f(x)$ ist offenbar eine Abbildung von Ξ auf $OZ(\Xi)$. Und da aus $x \prec y$ stets $f(x) < f(y)$, also bei der Subsumptionsordnung $f(x) \prec f(y)$ folgt, ist die Abbildung auch ein-eindeutig und ähnlich. Also ist Ξ dem $OZ(\Xi)$ ähnlich.

9. P ist dann und nur dann eine Ordnungszahl, wenn es

1. eine durch Subsumption ordnungsfähige Menge von Mengen ist,
2. seine Subsumptionsordnung eine Wohlordnung ist,
3. für jedes Element ξ von P stets $\xi = A(\xi, P)$ ist.

Erstens nehmen wir an, dass P eine Ordnungszahl ist, dann sei P die Ordnungszahl der wohlgeordneten Menge Ξ, deren Zählung $f(x)$ ist.

P ist eine Menge von Mengen, die nach dem soeben bewiesenem Satze durch Subsumption ordnungsfähig ist (also ist 1. erfüllt) und die dem wohlgeordneten Ξ ähnlich, also selbst wohlgeordnet ist (also ist 2. erfüllt). Für jedes ξ von P ist, da $\xi = f(x)$ (x Element von Ξ) sein muss,

$$\xi = f(x) = M(f(y);\, y \varepsilon \Xi,\, y \prec x) = M(f(y);\, y \varepsilon \Xi,\, f(y) < f(x) =$$
$$= M(\eta;\, \eta \varepsilon P,\, \eta \prec \xi) = A(\xi, P);$$

(also ist auch 3. erfüllt).

Zweitens nehmen wir an, dass P die Bedingungen 1., 2., 3. erfüllt. Dann ist es durch Subsumption ordnungsfähig, und in der Subsumptionsordnung wohlgeordnet. Wenn wir für alle Elemente x von P als Definition $f(x) = x$ setzen, so ist $f(x)$ eine Zählung von P. In der Tat ist wegen 3. für alle ξ von P

$$f(\xi) = \xi = A(\xi, P) = M(\eta;\, \eta \varepsilon A(\xi, P)) = M(f(\eta);\, \eta \varepsilon A(\xi, P)),$$

demnach ist

$$OZ(P) = M(f(\xi);\, \xi \varepsilon P) = M(\xi;\, \xi \varepsilon P) = P,$$

also ist P eine Ordnungszahl und zwar seine eigene Ordnungszahl.

III. Kapitel.

10. P sei eine Ordnungszahl. Dann ist P die Menge aller Ordnungszahlen, die $< P$ sind.

P sei nämlich die Ordnungszahl der wohlgeordneten Menge Ξ, deren Zählung $f(x)$ ist. Erstens nehmen wir an, dass Q ein Element von P ist. Wegen 3. ist dann

$$Q = A(Q, P) < P$$

und da $Q = f(x)$, (x Element von Ξ) sein muss, und

$$f(x) = OZ(A(x, \Xi))$$

ist, ist $f(x)$, also auch Q eine Ordnungszahl.

Zweitens nehmen wir an, dass Q eine Ordnungszahl ist, für die $Q < P$ ist. Wir ordnen P durch Subsumption. Es sei $\eta \prec \xi$, ξ gehöre zu Q.

Da dann ξ zu Q und zu P gehört, und P, Q Ordnungszahlen sind, ist

$$\xi = A(\xi, Q) = A(\xi, P)$$

Da η zu P gehört und $\eta \prec \xi$ ist, gehört η zu $A(\xi, P)$. Und da

$$A(\xi, P) = A(\xi, Q) < Q$$

ist, gehört es auch zu Q. D. h.: es ist $Q < P$. Wenn $\eta \prec \xi$ ist und ξ zu Q gehört, so gehört auch η zu Q. Nach einem bekannten Satze über wohlgeordnete Mengen (P ist wohlgeordnet), ist also Q ein Abschnitt in P. Für ein Element ξ von P ist also

$$Q = A(\xi, P) = \xi,$$

also gehört Q zu P.

Wir können den jetzt bewiesenen Satz auch so aussprechen: Wenn P, Q Ordnungszahlen sind, so ist $P \prec Q$ mit $P \varepsilon Q$ gleichbedeutend. Also ist für eine Ordnungszahl P niemals $P \varepsilon P$.

11. P, Q seien zwei verschiedene Ordnungszahlen. Dann ist $P < Q$ oder $P > Q$.

R sei der Durchschnitt von P und Q. Da P durch Subsumption ordnungsfähig ist und seine Subsumptionsordnung eine Wohlordnung ist (nach 1., 2.), da weiter $R \leqq P$ ist, so gilt dasselbe von R, also erfüllt R die Bedingungen 1. und 2. Jedes Element ξ von R gehört zu P und Q, und, weil P, Q Ordnungszahlen sind, ist

$$\xi = A(\xi, R) = A(\xi, Q).$$

$A(\xi, R)$ ist der Durchschnitt von $A(\xi, P)$ und $A(\xi, Q)$, also ist

$$\xi = A(\xi, R);$$

somit erfüllt R auch 3. Also ist R eine Ordnungszahl.

Es ist $R \leqq P$ und $R \leqq Q$. Wenn $R = P$ oder $R = Q$ ist, so ist $P \leqq Q$ oder $Q \leqq P$, also $P < Q$ ode $P > Q$ (weil $P \neq Q$ ist). Dies ist aber stets der Fall; denn wäre $R < P$ und $R < Q$, so wäre, da P, Q, R Ordnungszahlen sind, $R \varepsilon P$, $R \varepsilon Q$. Also wäre $R \varepsilon R$ (weil R der Durchschnitt von P und Q ist), was unmöglich ist, denn R ist eine Ordnungszahl.

12. U sei eine Menge von Ordnungszahlen. Zwei verschiedene Elemente P, Q von U sind stets Ordnungszahlen, also ist $P < Q$ oder $P > Q$. D. h.: U ist durch Subsumption ordnungsfähig. Die Subsumptionsordnung von U ist aber eine Wohlordnung.

Um das zu beweisen müssen wir zeigen, dass jedes $V \leqq U$, $V \neq O$ ein erstes Element hat.

P sei ein Element von V. (P ist eine Ordnungszahl.) Wenn es kein Element von V gibt, das $< P$ ist, so hat V ein erstes Element, nämlich P. Wenn es solche Elemente gibt, so sei ihre Menge: W. Da alle Elemente von W Ordnungszahlen sind (wegen $W \prec V \leqq U$) und $< P$ sind, gehören sie alle zu P, also ist $W \leqq P$. Da $W \leqq P$, $W \neq 0$ ist, und P wohlgeordnet ist, hat W ein erstes Element Q. (Wegen $Q \varepsilon W$ ist $Q < P$.) Da jedes Element von V entweder $\geqq P$, also $> Q$ ist, oder $< P$, also ein Element von W, und somit $\geqq Q$ ist, ist Q auch das erste Element von V. V hat also allenfalls ein erstes Element.

13. P ist dann und nur dann eine Ordnungszahl, wenn jedes Element von P eine Ordnungszahl ist und $\leqq P$ ist.

Erstens sei P eine Ordnungszahl. Jedes Element von P ist eine Ordnungszahl und $< P$.

Zweitens genüge P unseren Bedingungen. Als Menge von Ordnungszahlen ist dann P durch Subsumption ordnungsfähig und seine Subsumptionsordnung ist eine Wohlordnung, also sind 1., 2. erfüllt. Zweitens ist für jedes Element ξ von P

$$A(\xi, P) = M(\eta; \eta \varepsilon P, \eta \prec \xi),$$

also, weil alle Elemente η von P Ordnungszahlen sind,

$$= M(\eta; \eta \varepsilon P, \eta\, OZ, \eta \prec \xi) = M(\eta; \eta \varepsilon P, \eta \varepsilon \xi)$$

und somit, da $\xi \leqq P$ ist, auch

$$= M(\eta; \eta \varepsilon \xi) = \xi;$$

somit ist auch 3. erfüllt. Also ist P eine Ordnungszahl.

Wenn P eine Menge von Ordnungszahlen ist, so bedeutet für jedes Element ξ von P (weil P eine Ordnungszahl ist) $\xi \leqq P$ dass alle Ordnungszahlen die $< \xi$ sind (d. h. alle Elemente von ξ) zu P gehören. Wir können daher den soeben bewiesenen Satz auch so aussprechen: P ist dann und nur dann eine Ordnungszahl, wenn alle Elemente von P Ordnungszahlen sind, und wenn für jedes Element ξ von P, alle Ordnungszahlen η, für die $\eta < \xi$ ist, ebenfalls Elemente von P sind.

IV. Kapitel.

14. Ξ, H seien wohlgeordnete Mengen. Ξ und H sind dann und nur dann einander ähnlich, wenn $OZ(\Xi) = OZ(H)$ ist.

Erstens sei $OZ(\Xi) = OZ(H)$. Da Ξ dem durch Subsumption geordneten $OZ(\Xi)$, und H dem durch Subsumption geordneten $OZ(H)$ ähnlich ist, ist dann wirklich Ξ dem H ähnlich.

Zweitens sei Ξ dem H ähnlich. Dann sei $\varphi(x)$ eine ähnliche Abbildung von Ξ auf H und $g(x')$ die Zählung von H. Wenn wir für alle Elemente x von Ξ als Definition $f(x) = g(\varphi(x))$ setzen, so ist $f(x)$ eine Zählung von Ξ. In der Tat ist für alle x von Ξ

$$M(f(y); y \varepsilon \Xi, y \prec x) = M(g(\varphi(y)); y \varepsilon \Xi, y \prec x) =$$
$$= M(g(\varphi(y)); y \varepsilon \Xi, \varphi(y) \prec \varphi(x)) = M(g(y'); y' \varepsilon H, y' \prec \varphi(x)) =$$
$$= g(\varphi(x)) = f(x);$$

hieraus folgt aber

$$OZ(\Xi) = M(f(x); x \varepsilon \Xi) = M(g(\varphi(x)); x \varepsilon \Xi) =$$
$$= M(g(x'); x' \varepsilon H) = OZ(H).$$

15. Ξ ist dann und nur dann einem Abschnitt in H ähnlich, wenn $OZ(\Xi) < OZ(H)$ ist.

Erstens sei $OZ(\Xi) < OZ(H)$. Dann ist wegen 12. $OZ(\Xi)$ ein Element von $OZ(H)$, also (sein eigener) Abschnitt in H. Und da Ξ dem $OZ(\Xi)$, H dem $OZ(H)$ ähnlich ist, ist Ξ auch einem Abschnitt von H ähnlich.

Zweitens sei Ξ einem Abschnitte in H ähnlich. Die Zählung von H sei $g(x)$, der fragliche Abschnitt sei $A(\bar{x}, H)$. Dann ist wegen der Ähnlichkeit

$$OZ(\Xi) = OZ(A(\bar{x}, H)) = g(\bar{x})$$

also ist $OZ(\Xi)$ Element von $OZ(H)$, also ist wegen 12.

$$OZ(\Xi) < OZ(H).$$

16. Da stets einer und nur einer der folgenden drei Fälle eintritt (wegen 11.)

$$OZ(\Xi) < OZ(H), \quad OZ(\Xi) = OZ(H), \quad OZ(\Xi) > OZ(H),$$

so tritt auch stets einer und nur einer der drei folgenden Fälle ein:

Ξ ist einem Abschnitt von H ähnlich,
Ξ ist H ähnlich,
H ist einem Abschnitt von Ξ ähnlich.

Und diese drei Fälle sind bzw. gleichbedeutend mit

$$OZ(\Xi) < OZ(H) \text{ oder } OZ(\Xi)\,\varepsilon\, OZ(H),$$
$$OZ(\Xi) = OZ(H),$$
$$OZ(\Xi) > OZ(H) \text{ oder } OZ(H)\,\varepsilon\, OZ(\Xi).$$

17. Ξ sei wohlgeordnet. Dann gibt es eine und nur eine (durch Subsumption geordnete) Ordnungszahl die dem Ξ ähnlich ist, nämlich $OZ(\Xi)$.

$OZ(\Xi)$ ist Ξ in der Tat ähnlich. Und wenn die Ordnungszahl P dem Ξ ähnlich ist, so sei P die Ordnungszahl von H. Da H dem P, P dem Ξ ähnlich ist, ist H dem Ξ ähnlich, also

$$P = OZ(H) = OZ(\Xi);$$

hieraus folgt auch: zwei durch Subsumption geordnete Ordnungszahlen sind dann und nur dann ähnlich, wenn sie identisch sind.

Von dieser Stelle an ist es leicht die Theorie der Ordnungszahlen weiter zu entwickeln. Addition, Multiplikation von Ordnungszahlen sind unschwer zu begründen. Die „Definition durch Transfinite Induktion" ist allerdings nur dann zulässig, wenn der folgende Satz bewiesen ist:

„$f(x)$ sei eine Funktion, die für alle Mengen von Dingen eines Bereichs B definiert ist und deren Werte stets Dinge des Bereichs B sind. Es gibt dann eine und nur eine Funktion $\Phi(P)$, die für alle Ordnungszahlen P definiert ist und deren Werte stets Dinge des Bereichs B sind, mit der Eigenschaft, dass für alle Ordnungszahlen P ($P\,\overline{OZ}$ bedeute, dass P eine Ordnungszahl ist)

$$\Phi(P) = f(M(\Phi(Q);\ Q\,\overline{OZ}, Q < P)) = f(M(\Phi(Q);\ Q\,\varepsilon\, P))$$

ist."

Der Beweis dieses überhaupt nicht selbstverständlichen Satzes ist aber unschwer zu erbringen.[4]) Ist dieser Satz bewiesen, so kann auch die Theorie des Potenzirens von Ordnungszahlen, sowie die der „stetigen" oder „normalen"[5]) Ordnungszahl-Funktionen ohne weiteres entwickelt werden.

Anmerkungen.

[1]) *Cantor,* Mathematische Annalen, Bd. 46, 49.

[2]) *Zermelo,* Mathematische Annalen, Bd. 65, *Fränkel,* Mathematische Annalen, Bd. 86.

Das Axiom von *Fränkel* lautet so: „Wenn Ξ eine Menge ist und jedes Element x von Ξ durch ein ξ ersetzt wird, so gibt es eine Menge Ξ', deren Elemente die ξ sind." Es füllt eine wesentliche Lücke der *Zermelo*schen Axiomatik aus.

[3]) Vom axiomatischen Standpunkte ist es gar nicht sicher, ob es eine solche Menge gibt. Wir müssen vielmehr fordern, dass alle x mit der Eigenschaft $E(x)$ eine Menge bilden. Dann garantiert das *Fränkel*sche Axiom die Existenz von $M(f(x); E(x))$. Diese Bedingung wird im Folgenden stets erfüllt sein.

[4]) Der Beweis des Satzes verläuft (in starker Analogie zu den Schlüssen im 1. Kap., 1–6) etwa folgendermassen:

a) P sei eine Ordnungszahl. Gibt es dann eine Funktion $\Psi(Q)$ die für alle Ordnungszahlen $Q < P$ definiert ist, und die Eigenschaft

$$\Psi(Q) = f(M(\Psi(R); R\,\overline{OZ}, R < Q))$$

besitzt? Und wieviele solche gibt es?

b) Wenn es überhaupt eine gibt, so gibt es eine einzige. In diesem Falle heisse P „normal", und Ψ heisse Ψ_P. Ferner sei für ein normales P

$$\Phi(P) = f(M(\Psi_P(Q); Q\,\overline{OZ}, Q < P)).$$

c) Wenn P normal ist, so ist jedes $Q < P$ normal, und es ist für alle $R < Q$

$$\Psi_Q(R) = \Psi_P(R), \text{ und } \Phi(Q) = \Psi_P(Q).$$

d) Wenn alle $Q < P$ normal sind, so ist auch P normal. (Es ist $\Psi_P(Q) = \Phi(Q)$.)

e) Alle P sind normal. Aus *d*) folgt unmittelbar

$$\Phi(P) = f(M(\Psi_P(Q); Q\,\overline{OZ}, Q < P)) = f(M(\Phi(Q); Q\,\overline{OZ}, Q < P)),$$

also ist $\Phi(P)$ die gewünschte Funktion.

f) Es gibt nur eine derartige Funktion.

[5]) *Hausdorff*, Grundzüge der Mengenlehre, S. 114.

Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant.

M. E. Phragmén à l'occasion de son soixantième anniversaire le 2 octobre 1923.

Par M. MARCEL RIESZ à Stockholm.

Généralités. Le théorème de Parseval pour un intervalle fini.

1. On connaît le rôle que joue le théorème de *Parseval* dans la théorie des séries de *Fourier* et, plus généralement, dans celle des développements suivant des fonctions orthogonales. On sait aussi qu'on peut généraliser la notion d'orthogonalité et le théorème de *Parseval* de différentes manières, p. ex. en se servant de l'intégrale de *Stieltjes* correspondant à une distribution de masses positives.

Pour arriver à cette extension, disons d'abord quelques mots de l'intégrale de *Stieltjes*. Etant données dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ une fonction continue $f(x)$ et une fonction bornée non décroissante (ou, plus généralement, à variation bornée) $\varphi(x)$, on entend par l'intégrale de *Stieltjes*[1]) $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$ la limite de l'expression

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)); \quad x_0 = a, \ x_n = b, \ x_k \leqq \xi_k \leqq x_{k+1},$$

lorsqu'on fait tendre vers zéro le maximum des longueurs $x_{k+1} - x_k$.

Cette définition s'étend aisément à un intervalle infini, p. ex. à l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On posera, par définition,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\varphi(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$$

dès que cette limite a une valeur finie déterminée.

---

[1]) *T.-J. Stieltjes*, Recherches sur les fractions continues, Ann. de Toulouse t. 8 (1894), p. J. 1—122 et t. 9 (1895), p. A. 1—47; *voir* en particulier t. 8, p. J. 71 et *suiv*.

2. Dans le cas où, $\varphi(x)$ étant toujours non décroissante, $f(x)$ cesse d'être continue,[2] nous adopterons, au lieu de la définition précédente, la généralisation donnée par M. *Lebesgue* qui se rattache à l'ordre d'idées suivant. On considère d'abord l'intégrale de *Stieltjes* comme intégrale curviligne $\int f\,dy$ prise le long d'une courbe continue C, composée des points $y=\varphi(x)$ et des segments verticaux représentant les sauts de $\varphi(x)$; puis, au lieu d'évaluer cette intégrale par le procédé de *Riemann* adopté par *Stieltjes*, on y applique le procédé connu de M. *Lebesgue*.[3] C'est-à-dire que, en faisant l'inversion de la fonction $y=\varphi(x)$ et cela avec des conventions évidentes pour les valeurs de x et de y qui correspondent respectivement à des segments horizontaux et verticaux, on arrive à une intégrale rectiligne de la forme $\int_\alpha^\beta F(y)\,dy$ où $F(y)=f(x(y))$. Si cette intégrale existe[4] au sens de M. *Lebesgue*, on dira que $f(x)$ *est intégrable par rapport à* $d\varphi(x)$ et on posera, par définition,

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)=\int_\alpha^\beta F(y)\,dy.$$

L'extension à un intervalle infini est immédiate.

3. Considérons un cas particulier très simple dont nous aurons besoin dans la suite. Admettons que $\varphi(x)$ est constante par intervalles et ne croît que par un nombre fini de sauts brusques $\varrho_1,\ldots,\varrho_n$ correspondant aux points de discontinuité $x_1,\ldots,x_n$. Dans ce cas, la définition de *Stieltjes* ne s'applique que si $f(x)$ est continue aux points de discontinuité de $\varphi(x)$, tandis que, d'après la définition de M. *Lebesgue*, l'intégrale existe pour toute fonction $f(x)$

---

[2]) C'est le cas où $f(x)$ est continue qui est essentiel pour le but de notre travail, et en se bornant à ce cas, on pourra se contenter de la définition élémentaire que nous venons de donner.

[3]) *H. Lebesgue*, Sur l'intégrale de *Stieltjes* et sur les opérations linéaires, Comptes rendus Paris, t. 150 (1910), p. 86—88. Pour des définitions équivalentes *voir J. Radon*, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Sitzungsb. Akad. Wien, t. 122 IIa (1913), p. 1295—1438, *W. H. Young*, On integration with respect to a function of bounded variation, Proc. London math. Soc. (2) t. 13 (1913). p. 109—150.

[4]) La fonction $F(y)$ sera en général indéterminée pour les valeurs de y qui correspondent aux segments horizontaux de la courbe C, cependant ces valeurs formant toujours un ensemble dénombrable n'exerceront aucune influence sur l'intégrale si l'on la prend au sens de M. *Lebesgue*.

qui est finie aux points x_k. On a dans les deux cas

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\varphi(x) = \sum \varrho_k f(x_k).$$

Dans le cas où les points x_k forment un ensemble dénombrable de points isolés, la formule (1) subsiste dès que la série au second membre converge absolument.[5])

4. Passons maintenant à la question des polynomes orthogonaux, en nous restreignant d'abord au cas d'un intervalle fini (a, b). La fonction $\varphi(x)$ étant non décroissante et bornée dans cet intervalle, nous nous proposons de trouver des polynomes $q_0(x), q_1(x), \ldots$ tels que les relations

(2) $$\int_a^b q_m(x)\, q_n(x)\, d\varphi(x) = \begin{matrix} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{matrix}$$

aient lieu. Ces polynomes[6]) se calculent de proche en proche par les formules

(3) $$q_n(x) = C_n \left[x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int_a^b y^n q_j(y)\, d\varphi(y) \right) q_j(x) \right]$$

où le facteur C_n se détermine au signe près par la relation

(2′) $$\int_a^b q_n^2(x)\, d\varphi(x) = 1.$$

En général, ce procédé pourra être continué indéfiniment. Le cas exceptionnel est presqu'évident. En effet, les $q_r(x)$ étant déjà calculés pour $r \leqq n-1$, on pourra déterminer $q_n(x)$ de façon qu'on vient de dire, sauf dans le cas où le polynome $h_n(x) = x^n - \ldots$ figurant au second membre de (3) est tel que

(4) $$\int_a^b h_n^2(x)\, d\varphi(x) = 0.$$

Or si une telle relation a lieu pour un polynome $h(x)$, la fonction $\varphi(x)$ devra être constante dans tout intervalle où $h(x)$ est différent de zéro, c'est-à-dire qu'on se trouve dans le cas particulier très simple dont nous venons de parler. Inversement, dans ce cas particulier, en désignant par n le nombre des sauts, le polynome $h_n(x)$ s'annule[7]) aux points de discontinuité de $\varphi(x)$ et, par con-

[5]) D'une façon plus générale, il en est de même lorsque $\varphi(x)$ se réduit à une fonction des sauts; pour cette notion *cf.* p. ex. *C. de la Vallée Poussin*, Intégrales de *Lebesgue* etc. (Collection *Borel*) 1916, p. 89—90.

[6]) Il est bien connu que ces polynomes sont les dénominateurs d'une certaine fraction continue.

[7]) *Voir* la note suivante.

séquent, la relation (4) sera satisfaite. Nous convenons de poser dans ce cas exceptionnel $q_r(x) \equiv 0$ pour $r \geqq n$.

5. Nous passons au théorème de *Parseval* en restant toujours dans le cas d'un intervalle fini. Soit $f(x)$ une fonction intégrable ainsi que f^2 par rapport à $d\varphi(x)$. Posons

$$a_n = \int_a^b f(x)\, q_n(x)\, d\varphi(x).$$

Alors on a le théorème de *Parseval*

$$\int_a^b f^2(x)\, d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2.$$

Indiquons brièvement la démonstration de ce théorème. La série $\sum a_n q_n(x)$, considérée d'abord à un point de vue purement formel, est une espèce de série de *Fourier*. La somme d'ordre n, $s_n(x) = a_0 q_0(x) + \ldots + a_n q_n(x)$ est caractérisée par le fait que parmi les polynomes $h(x)$ de degré $\leqq n$ c'est la somme $s_n(x)$ qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'elle rend l'intégrale $\int_a^b (f(x) - h(x))^2\, d\varphi(x)$ minimum.[8] Cela posé, le théorème de *Parseval* est équivalent au fait que cette meilleure approximation tend vers zéro avec $1/n$. Tout cela se voit par les formules

$$\int_a^b (f(x) - h(x))^2\, d\varphi(x) = \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\, d\varphi(x) + \tag{5}$$
$$+ \int_a^b (h(x) - s_n(x))^2\, d\varphi(x)$$

et

$$\int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\, d\varphi(x) = \int_a^b f^2(x)\, d\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \tag{6}$$

Cela étant, la démonstration du théorème de *Parseval* sera achevée dès qu'on aura montré qu'il existe des polynomes $h_n(x)$ rendant l'erreur $\int_a^b (f(x) - h_n(x))^2\, d\varphi(x)$ arbitrairement petite. Or, dans le cas où $f(x)$ est continue, cela est une conséquence immédiate du théorème de *Weierstrass*. Dans le cas

---

[8]) Il s'ensuit immédiatement que, dans le cas particulier considéré au numéro précédent, le nombre des sauts étant désigné par n, $s_{n-1}(x)$ se confond avec le polynome de degré $n-1$ qui en tous les points de discontinuité de $\varphi(x)$ est égal à $f(x)$. Le théorème de *Parseval* pour ce cas particulier en résulte sur-le-champ.

général, on n'aura qu'à combiner ce fait avec un autre que voici, savoir que toute fonction $f(x)$ intégrable avec son carré par rapport à $d\varphi(x)$ peut être approchée par une fonction continue $g(x)$ de sorte que l'intégrale $\int_a^b (f(x)-g(x))^2\, d\varphi(x)$ devienne aussi petite qu'on voudra.[9])

6. Si $f(x)$ est une fonction complexe dont les parties réelle et imaginaire sont intégrables avec leurs carrés par rapport à $d\varphi(x)$, nous entendrons par théorème de *Parseval* la formule

$$\int_a^b |f(x)|^2\, d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

La somme de *Fourier* $s_n(x)$ est alors le polynome qui, parmi tous les polynomes de degré $\leqq n$ minime l'intégrale

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|^2\, d\varphi(x). \tag{7}$$

On a encore l'identité

$$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2\, d\varphi(x) = \int_a^b |f(x)|^2\, d\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \tag{7'}$$

et le théorème de *Parseval* est équivalent au fait qu'il existe des polynomes $h_n(x)$ qui rendent l'intégrale (7) arbitrairement petite.

7. En substituant maintenant l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$ à l'intervalle fini (a, b), alors, pour que le problème traité plus haut garde son sens, il faudra évidemment faire l'hypothèse complémentaire que les moments de $d\varphi(x)$

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\varphi(x) \tag{8}$$

existent. Cela posé, la formation des polynomes orthogonaux se fait comme plus haut.

Quant à la validité du théorème de *Parseval*, il y a une différence essentielle entre les deux cas. Dans le cas d'un intervalle infini, ce théorème ne tient pas sans exception comme dans le cas d'un intervalle fini, mais sa validité dépend de la nature du problème des moments attaché aux constantes (8). En remettant à plus tard les explications nécessaires, nous nous bornons à énoncer notre résultat principal.

---

[9]) Cela se voit par des considérations analogues à celles de M. *F. Riesz*, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. t. 69 (1910), p. 449-497, *cf.* p. 459.

Pour que le théorème subsiste il faut et il suffit que, ou bien le problème des moments en question soit déterminé ou bien, s'il est indéterminé, que $\varphi(x)$ en soit une solution extrémale.[10])

Pour arriver à ce théorème, nous commençons par réduire le problème général à un cas particulier.

Quelques théorèmes d'approximation. Réduction du problème général au cas particulier ou $f(x) = \frac{1}{\alpha - x}$. La meilleure approximation de $\frac{1}{\alpha - x}$.

8. En traitant le cas d'un intervalle fini, nous avons vu que la question de la validité du théorème de *Parseval* était, en somme, une question d'approximation. Pour attaquer le cas d'un intervalle infini, nous commençons par établir quelques théorèmes d'approximation très simples.

I. *Toute fonction $F(x)$ continue dans l'intervalle* $(0, \infty)$, *extrémités y-comprises,*[11]) *peut être approchée uniformément et indéfiniment par des combinaisons linéaires de la fonction constante* 1 *et de fonctions de la forme $1/(x+a)$ où les a désignent des nombres positifs.* C'est-à-dire que, ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on pourra trouver une combinaison linéaire $S(x)$ formée d'un nombre fini de telles fonctions en sorte que $|F(x) - S(x)| < \varepsilon$, $0 \leqq x \leqq \infty$.

La démonstration est immédiate. La transformation $t = 1/(x+a)$ fait correspondre à l'intervalle infini $(0, \infty)$ l'intervalle fini $(0, 1/a)$. Donc, d'après le théorème de *Weierstrass,* on pourra trouver des constantes ν de façon que

---

[10]) Parmi les résultats connus qui sont des cas particuliers du nôtre, nous nous bornons à citer ceux de MM. *Weyl* et *Wigert* qui ont démontré le théorème de *Parseval* pour les distributions $e^{-1/2 x^2}dx$ et $e^{-x}dx$ $(x > 0)$, les polynomes orthogonaux correspondants étant respectivement les polynomes d'*Hermite* et ceux de *Laguerre*; *voir H. Weyl,* Singuläre Integralgleichungen, Math. Annalen t. 66 (1909), p. 273—324; *S. Wigert,* Contributions à la théorie des polynomes d'*Abel-Laguerre,* Arkiv för Mat. etc. t. 15, n° 25 (1921), p. 1—22. Lesdites distributions donnent lieu à des problèmes des moments déterminés.

[11]) Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est continue pour une valeur infinie de la variable lorsque la valeur limite correspondante existe et qu'elle est finie.

$$\left|F(x)-\left(\nu_0+\frac{\nu_1}{x+a}+\ldots+\frac{\nu_n}{(x+a)^n}\right)\right|<\varepsilon.$$

On pourra poser $a_j = a+\delta_j$ $(j=1,\ldots,n)$ et choisir les δ_j tous différents les uns des autres et assez petits pour que l'inégalité subsiste si l'on remplace chaque puissance $(x+a)^k$ par le produit $(x+a_1)\ldots(x+a_k)$. En développant en fractions simples, on obtiendra une expression de la forme exigée. Ajoutons que si la fonction $F(x)$ s'annule à l'infini, le terme constant pourra être supprimé.[12])

II. *Toute fonction $G(x)$ continue entre $-\infty$ et $+\infty$ qui s'annule pour $x=\pm\infty$, peut être approchée uniformément et indéfiniment par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $1/(x^2+b^2)$ et $x/(x^2+b^2)$.*

Pour la démonstration, observons d'abord que la fonction $G(x)$ pourra être approchée uniformément et indéfiniment par des fonctions qui sont paires au voisinages de $x=0$ et de $x=\pm\infty$. On pourra donc supposer qu'il en est déjà ainsi pour la fonction $G(x)$ elle-même.

Cela posé, les deux fonctions paires

$$G_1(x)=G(x)+G(-x),\quad G_2(x)=\frac{1+x^2}{2x}(G(x)-G(-x))$$

seront des fonctions continues de x^2 qui s'annulent à l'infini et alors elles pourront, d'après le théorème I et la remarque que nous venons d'y ajouter, être approchées uniformément et indéfiniment par des combinaisons linéaires de fonctions la forme $1/(x^2+b^2)$. De plus, en multipliant les expressions approchées de $G_2(x)$ par le facteur $2x/(1+x^2)$ dont le module est $\leqq 1$, on aura pour $G(x)-G(-x)$ des expressions approchées de la forme

$$\frac{2x}{1+x^2}\sum\frac{\mu_k}{x^2+b_k^2}.$$

On peut évidemment supposer que toutes les valeurs b_k^2 sont différentes de 1. Alors cette expression pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{\nu_0 x}{x^2+1}+\sum\frac{\nu_k x}{x^2+b_k^2},$$

ce qui achève la démonstration.

---

[12]) On voit aussi par le raisonnement du texte que l'on peut assujettir les a_j à la restriction d'appartenir à un ensemble donné d'avance n'admettant qu'un seul point $a>0$ comme point limite. La question concernant les ensembles les plus généraux d'où l'on pourra choisir les a_j de façon que le théorème subsiste, est facile à résoudre.

9. Le troisième théorème d'approximation — c'est précisément le théorème dont nous aurons besoin dans la suite — ne concerne plus l'approximation uniforme; il s'y agit d'une approximation dans le sens des moindres carrés, telle que nous en avons déjà parlé plus haut. Avant d'énoncer ce théorème, il nous sera utile d'introduire quelques notations.

Soit $\varphi(x)$ une fonction non décroissante et bornée, définie dans l'intervalle $-\infty < x < +\infty$. Nous ne considérons que des fonctions $f(x)$ réelles ou complexes qui avec $|f|^2$ sont intégrables par rapport à $d\varphi(x)$ dans l'intervalle en question. La classe de ces fonctions sera désignée par Ω. Les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ appartenant à cette classe, toute combinaison linéaire y appartiendra également. Nous appellerons *distance* de f_1 et de f_2 la valeur

$$[f_1, f_2] = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x) - f_2(x)|^2 \, d\varphi(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après une généralisation connue de l'inégalité de *Schwarz*, on obtient immédiatement

$$[f_1, f_3] \leqq [f_1, f_2] + [f_2, f_3]. \tag{9}$$

Enfin, étant donné un certain ensemble de fonctions $g(x)$ appartenant à la classe Ω, nous dirons qu'une fonction $f(x)$ de cette classe peut être approchée indéfiniment *en moyenne* (par rapport à $d\varphi(x)$) par les fonctions $g(x)$, si l'on peut choisir $g(x)$ de sorte que la distance de f et de g devienne arbitrairement petite.

Cela étant, voici notre théorème.

III. *Toute fonction $f(x)$ de la classe Ω peut être approchée indéfiniment en moyenne (par rapport à $d\varphi(x)$) par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $1/(\alpha - x)$ où les α sont des nombres imaginaires* (c'est-à-dire non réels).

En effet, toute fonction $f(x)$ de la classe Ω peut être approchée indéfiniment en moyenne par des fonctions continues $g(x)$ de la même classe qui s'annulent à l'infini.[13]) D'après le théorème II, ces dernières fonctions peuvent être approchées uniformément et indéfiniment par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme

$$\frac{1}{x^2+b^2} = \frac{1}{2ib}\left(\frac{1}{x-ib} - \frac{1}{x+ib}\right) \text{ et } \frac{x}{x^2+b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-ib} + \frac{1}{x+ib}\right)$$

[13]) On peut même supposer que la fonction $g(x)$ s'annule pour toute valeur suffisamment grande de $|x|$. On le voit en observant que la variation de $\varphi(x)$ est très petite dans des intervalles assez éloignés; *cf.* encore la note[9]).

c'est-à-dire par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $1/(\alpha-x)$. Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ de la classe Ω fût approchée en moyenne par la fonction continue $g(x)$ s'annulant à l'infini avec une erreur moindre que ε_1 (c'est-à-dire que $[f, g] < \varepsilon_1$) et que la fonction $g(x)$ fût approchée uniformément, avec une erreur moindre que ε_2, par une combinaison linéaire $S(x)$ de fonctions de la forme $1/(\alpha-x)$, alors, par l'inégalité (9), $S(x)$ approchera en moyenne $f(x)$ avec une erreur moindre que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left(\int d\varphi(x)\right)^{\frac{1}{2}}$ ce qui achève la démonstration.

10. Revenons maintenant au théorème de *Parseval*. Soit donc $\varphi(x)$ une fonction non décroissante telle que les moments (8) existent. Nous allons démontrer, en nous appuyant sur le théorème III, que *la question de la validité du théorème de Parseval pour toutes les fonctions $f(x)$ de la classe Ω se réduit au cas particulier $f(x) = 1/(\alpha-x)$.*

En effet, admettons un instant que la distribution $d\varphi(x)$ soit telle que le théorème de *Parseval* ait lieu pour les fonctions $1/(\alpha-x)$. D'après une remarque faite déjà au n° 5, cela revient à ce que ces fonctions peuvent être approchées indéfiniment en moyenne par des polynomes $h(x)$. Alors il en sera de même de toute combinaison linéaire $S(x)$ de ces fonctions. Ceci résulte immédiatement de l'inégalité analogue à l'inégalité (9)

$$(10) \qquad [(\mu_1 f_1 + \ldots + \mu_n f_n), (\mu_1 h_1 + \ldots + \mu_n h_n)] \leq$$
$$\leq |\mu_1| [f_1, h_1] + \ldots + |\mu_n| [f_n, h_n].$$

Cela posé, étant donnée une fonction arbitraire $f(x)$ de la classe Ω, on l'approchera d'abord par une combinaison linéaire $S(x)$ des fonctions $1/(\alpha-x)$ avec une erreur $< \varepsilon_1$. Alors, si le théorème de *Parseval* a lieu pour ces dernières fonctions, on pourra approcher $S(x)$ par un polynome $h(x)$ avec une erreur $< \varepsilon_2$. Enfin, en vertu de (9), ce polynome approchera $f(x)$ avec une erreur $< \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et alors le théorème de *Parseval* tiendra aussi pour $f(x)$. Tout revient donc à ceci: *Quelles sont les distributions $d\varphi(x)$ telles que le théorème de Parseval a lieu pour les fonctions particulières $1/(\alpha-x)$?*

11. Soit $\sum a_j q_j(x)$ le développement de *Fourier* de $1/(\alpha-x)$. En vue du théorème de Parseval, il s'agit d'évaluer le reste

$$R_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\alpha-x} - s_n(x) \right|^2 d\varphi(x), \; s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j q_j(x)$$

(*cf.* la formule (7′)). Le polynome $s_n(x)$ est caractérisé par la propriété suivante. Parmi tous les polynomes $h(x)$ de degré $< n$, c'est $s_n(x)$ qui rend l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\alpha - x} - h(x) \right|^2 d\varphi(x)$$

minimum. En posant alors $1 - (\alpha - x)\, s_n(x) = l_n(x)$, on voit que le polynome $l_n(x)$ est la solution du problème de minimum suivant.

Parmi tous les polynomes $l(x)$ de degré $\leqq n+1$ tels que $l(\alpha) = 1$, trouver celui qui rend l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | l(x) |^2 \frac{d\varphi(x)}{| \alpha - x |^2}$$

minimum. La valeur de ce minimum sera précisement $R_n(\alpha)$. Le théorème de *Parseval* aura lieu ou n'aura pas lieu suivant que cette valeur minimum tend ou ne tend pas vers zéro. C'est une discussion approfondie du problème des moments correspondant à la distribution $d\varphi(x)$ qui nous permettra de remplacer cette réponse préliminaire par la réponse définitive.

Exposé rapide de quelques points de la théorie du problème des moments.[14])

12. Étant donnée une suite $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, on entend par problème des moments (par rapport à l'intervalle $(-\infty, +\infty)$) les deux questions suivantes.

Les équations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\varphi(x) = c_n \tag{10}$$

admettent-elles au moins une solution non décroissante $\varphi(x)$ (*question d'existence*) et si tel est le cas, cette solution est-elle unique (*question d'unicité*)?

---

[14]) *Cf.* outre le Mémoire cité de *Stieltjes* les travaux suivants: *H. Hamburger,* Über eine Erweiterung des *Stieltjes*schen Momentenproblems, *I, II* et *III,* Math. Ann. t. 81 (1920), p. 235—319, t. 82 (1921), p. 120—164, *ib* p. 168—187; *E. Stridsberg,* Några aritmetiska undersökningar etc. Notes 2 et 3, Arkiv för Mat. etc. t. 13, n° 25 (1918), p. 1—70 et t. 15, n° 22 (1921) p. 1—126; *M. Riesz,* Sur le problème des moments, Notes *I, II* et *III,* Arkiv för Mat. etc. t. 16, n°s 12 (1921), p. 1—23 et 19 (1922), p. 1—21, t. 17, n° 16 (1923), p. 1—52; *R. Nevanlinna,* Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das *Stieltjes*sche Momentenproblem, Ann. Ac. Scient. Fenn., t. 18, n° 5 (1922), p. 1—53; *T. Carleman,* Sur le problème des moments, Comptes rendus Paris, t. 174 (1922), p. 1680—1682.

Par des raisons qui proviennent de la nature de l'intégrale de *Stieltjes*, on considère comme identiques deux solutions coïncidant, à une constante additive près, en tous leurs points de continuité; en effet, la valeur de l'intégrale de *Stieltjes* (10) ne dépend pas des valeurs qu'on attribue à $\varphi(x)$ en ses points de discontinuité. Si toutes les solutions sont identiques d'après la convention que nous venons de faire, on dira que le problème des moments est *déterminé;* le problème sera dit *indéterminé* dans le cas contraire.

Ici nous n'aurons pas à nous occuper de la question d'existence (question d'ailleurs bien facile) *les moments c_n étant toujours définis par une distribution donnée d'avance.* Il ne reste que la question d'unicité. La réponse à cette question dépend de la solution d'un problème de minimum que voici.

13. Etant donné un nombre complexe arbitraire α, déterminer parmi tous les polynomes $h(x)$ de degré $\leqq n$ tels que $h(\alpha)=1$, celui qui rend l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 d\varphi(x)$$

minimum.

Le polynome $h(x)$ en question, comme d'ailleurs tout polynome de degré $\leqq n$, pourra être mis sous la forme $h(x)=a_0 q_0(x)+\ldots+a_n q_n(x)$. Soit d'autre part $g(x)=b_0 q_0(x)+$ $+\ldots+b_n q_n(x)$ un polynome de degré $\leqq n$ s'annulant pour $x=\alpha$, d'ailleurs arbitraire, et soit $\bar{g}(x)$ le polynome imaginaire conjugué. Pour que $h(x)$ fournisse le minimum en question il faut et il suffit, d'après un raisonnement connu,[15]) que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\bar{g}(x)\,d\varphi(x)=0.$$

Ceci est équivalent au fait suivant: la relation $g(\alpha)=0$ ou ce qui revient au même, la relation

$$\bar{g}(\bar{\alpha})=\bar{b}_0 q_0(\bar{\alpha})+\ldots+\bar{b}_n q_n(\bar{\alpha})=0$$

entraîne

$$\bar{b}_0 a_0+\ldots+\bar{b}_n a_n=0.$$

Alors $h(x)$ est de la forme $C(q_0(\bar{\alpha})q_0(x)+\ldots+q_n(\bar{\alpha})q_n(x))$ où la constante C se détermine par la condition $h(\alpha)=1$, ce qui donne en définitive

$$h(x)=\sum^{n} q_j(\bar{\alpha})\,q_j(x) : \sum_{j=0}^{n} |q_j(\alpha)|^2 \tag{11}$$

[15]) *Cf.* p. ex *M. Riesz, III*, p. 19–21. *l. c.* [14]).

et le minimum en question $\varrho_n(\alpha)$ est donné par la formule

$$\frac{1}{\varrho_n(\alpha)} = \sum_{j=0}^{n} |q_j(\alpha)|^2. \tag{12}$$

Pour n croissant, la valeur positive $\varrho_n(\alpha)$ ira en décroissant vers une valeur limite déterminée $\varrho(\alpha)$ positive ou zéro. Cette valeur est donnée par la formule

$$\frac{1}{\varrho(\alpha)} = \sum_{j=0}^{\infty} |q_j(\alpha)|^2, \tag{12'}$$

cette série étant convergente lorsque $\varrho(\alpha) > 0$ et divergente lorsque $\varrho(\alpha) = 0$. La distinction entre ces deux cas est d'une importance décisive pour le problème des moments correspondant à la distribution $d\varphi(x)$.

14. Voici maintenant la solution de la question d'unicité.[16]) *Pour que le problème soit déterminé, il faut que la valeur $\varrho(\alpha)$ définie plus haut s'annule en tout point imaginaire. Il en sera ainsi, dès que $\varrho(\alpha)$ s'annule en un seul point réel ou imaginaire.*

Rappelons aussi que, en vertu de la formule (12'), on pourra encore dire : Pour que le problème des moments soit déterminé, il faut que la série (12') soit divergente en *tout* point imaginaire. Il en sera ainsi dès que la série diverge en un *seul* point réel ou imaginaire. Il s'ensuit que dans le cas indéterminé la série (12') converge pour toute valeur finie de α. Ajoutons que la convergence est uniforme dans tout domaine borné.

15. Admettons maintenant qu'on se trouve dans le cas indéterminé. Soit $\alpha = \xi + i\eta$ un nombre imaginaire fixe. Formons avec toutes les solutions $\psi(x)$ du problème des moments, attaché à la ui te $c_0, c_1, \dots c_n, \dots$, l'intégrale

$$H(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{\alpha - x}. \tag{13}$$

M. *R. Nevanlinna* a démontré[17]) que l'ensemble des valeurs $H(\alpha)$ donne la périphérie et l'intérieur d'une certaine circonférence C de rayon $\varrho(\alpha)/2|\eta|$. A chaque point intérieur à cette circonférence il correspond une *infinité* de solutions différentes du problème des moments, telles que la valeur (13) correspondante coïncide avec ce point. A un point périphérique il n'en correspond qu'une *seule*. L'ensemble des solutions correspondant à différents points de la circonférence C ne dépend pas du choix de α. Nous appel-

[16]) *Voir* p. 34 du travail cité dans la note précédente.

[17]) *R. Nevanlinna*, l. c. [14]).

lerons ces solutions *solutions extrémales.* Les seuls points de croissance d'une telle solution sont les pôles d'une certaine fonction méromorphe

$$H(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\,\psi^*(x)}{z-x}=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

$P(z)$ et $Q(z)$ étant des fonctions entières transcendantes à une infinité de zéros réels. En choisissant parmi ces fonctions méromorphes deux fonctions différentes $P_1(z):Q_1(z)$ et $P_2(z):Q_2(z)$, toute autre fonction $P(z):Q(z)$ pourra être mise sous la forme

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P_1(z)+\tau P_2(z)}{Q_1(z)+\tau Q_2(z)},$$

τ désignant un paramètre réel. En faisant varier ce paramètre de $-\infty$ à $+\infty$, le rapport $P(z):Q(z)$ décrit la circonférence C correspondant au point z. Quant à la structure d'une solution extrémale, nous avons vu qu'une telle solution ne croît que par des sauts brusques en des points isolés en nombre infini, savoir aux pôles dont nous venons de parler. On peut toujours choisir τ de façon qu'une valeur réelle arbitraire devienne un pôle de la fonction méromorphe correspondant à τ. En désignant un tel pôle par β, le saut en question sera précisément égal à $\varrho(\beta)$. Rappelons enfin une seconde propriété extrémale[18]) très remarquable des solutions considérées. C'est qu'une telle solution présente, en chacun de ses points de discontinuité, un saut plus grand que toute autre solution.

Le théorème de Parseval pour $\frac{1}{\alpha-x}$. Le théorème général.

16. Revenons maintenant au théorème de *Parseval.* Rappelons que nous avons montré au n° 10 que la validité de ce théorème pour des fonctions arbitraires $f(x)$ ne dépend que de la validité du théorème pour les fonctions particulières $1/(\alpha-x)$. De plus, au n° 11, nous avons trouvé que la condition nécessaire et suffisante pour que le théorème ait lieu pour $1/(\alpha-x)$ c'est qu'un certain minimum $R_n(\alpha)$ tende vers zéro avec $1/n$. En rapprochant ce résultat de ceux exposés au n° 14, on pourra dire: Pour que $R_n(\alpha)$ tende vers zéro, c'est-à-dire pour que le théorème de *Parseval* ait lieu pour la fonction $1/(\alpha-x)$ il faut

[18]) *Cf. H. Hamburger, III,* et *M. Riesz, I, l. c.* [14]).

et il suffit que la distribution $\frac{d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2}$ donne lieu à un problème des moments *déterminé.* On voit facilement que cela revient à ce que les relations

$$(14)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^n\,d\psi(x)}{|\alpha-x|^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^n\,d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2},\quad n=0,1,2,\ldots$$

entraînent que la fonction non décroissante $\psi(x)$ est, au point de vue adopté, identique à la fonction donnée $\varphi(x)$.

La condition que nous venons de formuler dépend encore de la nature du problème des moments défini par la distribution $\frac{d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2}$, et comme α est arbitraire, il paraît s'agir d'une infinité de problèmes des moments. Or il n'en est rien. On passe immédiatement au problème des moments primitif défini par la distribution $d\varphi(x)$. Pour le voir, remarquons que le système (14) est équivalent au système

$$(15)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}x^n\,d\psi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\,d\varphi(x),\quad n=0,1,2,\ldots,$$

complété par la relation

$$(16)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\psi(x)}{\alpha-x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi(x)}{\alpha-x}.$$

En effet, cette dernière relation pourra aussi s'écrire

$$(16')\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(\bar{\alpha}-x)\frac{d\psi(x)}{|\alpha-x|^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}(\bar{\alpha}-x)\frac{d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2}$$

et alors on voit que les égalités (14) entraînent (16). Inversement, en posant, en (16'), $\alpha=\xi+i\eta$, en séparant les parties réelles et imaginaires et en observant que η est différent de zéro, on obtient immédiatement les relations (14) pour $n=0$ et $n=1$. Afin d'obtenir les relations (14) pour $n>1$, observons d'abord que, pour x réel, $|\alpha-x|^2=(\xi-x)^2+\eta^2=g(x)$ est un polynome du second degré de x. En écrivant $x^n=g(x)t_n(x)+\lambda_n+\mu_n x$ où $t_n(x)$ est un polynome, λ_n et μ_n sont des constantes, il vient de (15) et des deux premières relations (14) que nous venons d'obtenir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^n\,d\psi(x)}{g(x)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t_n(x)+\frac{\lambda_n+\mu_n x}{g(x)}\right)d\psi(x)=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t_n(x)+\frac{\lambda_n+\mu_n x}{g(x)}\right)d\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^n\,d\varphi(x)}{g(x)}.$$

D'ici on conclut: Pour que la distribution $\frac{d\varphi(x)}{|\alpha - x|^2}$ donne lieu à un problème des moments déterminé, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune solution $\psi(x)$ du problème original différente de $\varphi(x)$ et telle que la relation (16) ait lieu. Tel sera évidemment le cas, quand le problème original est déterminé. D'autre part, pour que ceci ait lieu lorsque le problème original est indéterminé, il faut et il suffit, d'après un théorème cité de M. *R. Nevanlinna*, que $\varphi(x)$ en soit une solution extrémale. Remarquons que ces conditions sont *indépendantes* de α.

En définitive, on pourra dire:

Pour que le théorème de Parseval ait lieu pour toute fonction $f(x)$ intégrable avec $|f|^2$ par rapport à $d\varphi(x)$, il faut et il suffit que, ou bien le problème des moments défini par la distribution $d\varphi(x)$ soit déterminé ou, si ce problème est indéterminé, que $\varphi(x)$ en soit une solution extrémale.[19])

Une condition équivalente à celle-ci c'est que *le problème des moments correspondant à la distribution* $\frac{d\varphi(x)}{1+x^2}$ *soit déterminé.* Dans cette condition, $1 + x^2$ pourra être remplacé par un polynome quadratique positif quelconque.

La série de Fourier dans le cas indéterminé.

17. Nous finissons par quelques remarques supplémentaires concernant le cas indéterminé.

Soit $d\varphi(x)$ une distribution qui donne lieu à un problème des moments indéterminé. Nous venons de voir que si $\varphi(x)$ n'est pas une solution extrémale de ce problème (tel sera p. ex. toujours le cas si $\varphi(x)$ est continue), le théorème de Parseval ne tiendra pas pour toute f, intégrable avec $|f|^2$ par rapport à $d\varphi(x)$ et, en particulier, que ce théorème ne tiendra pour aucune des fonctions $1/(\alpha - x)$. On peut alors se demander s'il existe des fonctions particulières $f(x)$ pour lesquelles le théorème a lieu. Telles fonc-

[19]) Dans son Mémoire classique *l. c.* [1]) *Stieltjes* n'a considéré que des $d\varphi(x)$ réparties sur l'intervalle $(0, \infty)$. Ce cas entre comme cas particulier dans celui du texte et le lecteur familier avec la théorie de *Stieltjes* pourra sans difficulté exprimer notre résultat dans le langage de cette théorie. En particulier, le théorème de *Parseval* tiendra toujours lorsque la distribution $d\varphi(x)$ donne lieu à un problème des moments qui est déterminé au point de vue de *Stieltjes.*

tions sont p. ex. tous les polynomes. Nous allons voir que le théorème subsiste pour une classe de fonctions bien plus générale.

Soit $\sum a_n q_n(x)$ la série de *Fourier* d'une fonction f intégrable avec $|f|^2$ par rapport à une distribution $d\varphi(x)$. Alors la formule (7') donne l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, d\varphi(x)$$

ce qui met entre autre en évidence la convergence de la série au premier membre. Admettons que $d\varphi(x)$ donne lieu à un problème indéterminé. Alors l'allure de la série de *Fourier* sera entièrement différente de celle que l'on connaît de la théorie classique. En effet, la série (12') converge uniformément dans tout domaine borné. On en conclut par un raisonnement connu que la série $\sum a_n q_n(z)$ converge absolument pour toute valeur de z, la convergence étant uniforme en tout domaine borné. Par conséquent, cette série représentera dans tout le plan une *fonction entière* $F(z)$.[20]) Evidemment, les valeurs de $F(z)$ sur l'axe réel seront, en général, différentes de celles de la fonction $f(x)$.[21]) La série de *Fourier* $\sum a_n q_n(x)$ converge aussi en moyenne (par rapport à $d\varphi(x)$) vers $F(x)$ dont, par conséquent, elle est aussi la série de *Fourier*. Il s'ensuit que les constantes de *Fourier* de la différence $f(x) - F(x)$ sont tous zéro et que, par suite, cette différence est orthogonale à toutes les puissances x^n $(n = 0, 1, \ldots)$ et en outre à la fonction $F(x)$ et que l'on a

$$(17) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |f^2| \, d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} |f - F|^2 \, d\varphi(x).$$

Le théorème de *Parseval* pour $f(x)$ aura lieu ou n'aura pas lieu suivant que l'intégrale au second membre est zéro ou non. En particulier, le théorème tiendra lorsque $f(x) \equiv F(x)$ c'est-à-dire que $f(x)$ est partout représentée par sa série de Fourier. Pour $f(x)$ continue, cette condition est aussi nécessaire dans le cas où $\varphi(x)$ n'est constante dans aucun intervalle. Dans le cas contraire, on pourra laisser de côté l'intérieur des intervalles où $\varphi(x)$ est con-

---

[20]) D'après un résultat que nous avons donné récemment *l. c.* [15]) p. 37. on aura $|F(z)| = e^{\varepsilon(r) r}$ où $r = |z|$ et $\varepsilon(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$.

[21]) Avant que je fusse arrivé à ces résultats M. *Wigert* y est parvenu par un calcul direct très intéressant dans un cas particulier qu'il a eu la bonté d'examiner; *S. Wigert*, Sur les polynomes orthogonaux et l'approximation des fonctions continues, Arkiv för Mat. etc. t. 17, n° 18 (1923), p. 1—15.

stante et ne prêter attention qu'aux points de croissance qui restent. Dans tous les cas, la formule (17) met en évidence la condition nécessaire et suffisante pour que le théorème de *Parseval* tienne pour $f(x)$, continue ou discontinue; c'est que $f(x)$ soit représentée par sa série de *Fourier* en tous les points de croissance de $\varphi(x)$, sauf peut-être dans un ensemble de mesure nulle par rapport à $d\varphi(x)$, c'est-à-dire dans un ensemble sur lequel la variation totale de $\varphi(x)$ est égale à zéro. Dans le cas où $\varphi(x)$ est une solution extrémale, il s'ensuit, d'après notre théorème général, que *toute* fonction f intégrable avec $|f|^2$ par rapport à $d\varphi(x)$ sera représentée par sa série de *Fourier* en tous les points de croissance de $\varphi(x)$. Rappelons que ces points sont des points isolés et ajoutons que ce résultat se vérifie facilement par un calcul direct.

18. Disons encore un mot d'une question rentrant dans l'ordre d'idées du théorème de *Riesz-Fischer*. Etant données des constantes a_n telles que $\sum |a_n|^2$ est convergente, existe-t-il une fonction $f(x)$ intégrable avec $|f|^2$ par rapport à $d\varphi(x)$ dont ces a_n sont les constantes de *Fourier* suivant les polynomes orthogonaux $q_n(x)$? Alors, que le cas soit déterminé ou indéterminé, la réponse sera affirmative; on le voit par une adaptation facile de l'une ou l'autre des démonstrations connues. Or, il ne sera pas sans intérêt d'observer que, dans le cas indéterminé, cette réponse affirmative est déjà fournie par le raisonnement du numéro précédent. En effet, les a_n étant tels que nous venons de le dire, la fonction entière $F(x)$ donnée par la série $\sum a_n q_n(x)$ aura la propriété désirée.[22])

Győr, le 9 septembre 1923.

---

[22]) Signalons encore une propriété des fonctions telles que $F(x)$, c'est que la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, d\varphi(x)$ est la même pour toutes les solutions $\varphi(x)$ de notre problème des moments. Il en est de même des fonctions du type $x^n F(x)$, $|F(x)|^2$, $F^2(x)$, $F_1(x) F_2(x)$. D'autre part, à la fin de la troisième de nos Notes citées plus haut, nous sommes arrivé par une voie différente à une classe de fonctions que nous avons désignées par $E(x)$, jouissant de la même propriété, c'est-à-dire telles que leur intégrale par rapport aux différentes solutions était toujours la même. Je profite de l'occasion pour observer que toute telle fonction $E(x)$ pourra s'écrire comme la différence de deux fonctions non négatives de la même classe et que ces dernières fonctions pourront, pour les valeurs réelles de x, être mises sous la forme $|F(x)|^2$, $F(x)$ étant du type considéré dans le texte.

Zur Topologie der Ebene.

Von JULIUS PÁL in Kjobenhavn.

Die Literatur, die über die Fundamentalsätze der Topologie der Ebene vorliegt, beleuchtet diese Fragen so vielseitig, dass es jetzt schon möglich ist, diese Sätze im Rahmen eines *leicht lesbaren Lehrbuches* darzustellen. Aus dem Inhalt eines solchen Buches, das vielleicht in näherer Zukunft erscheinen kann, will ich hier einiges mitteilen. Da es sich mehr und mehr zeigt, dass eines der einfachsten und erfolgreichsten Mittel für die topologische Erforschung der Ebene die Untersuchung von Richtungsänderungen ist, scheint mir die natürlichste Einleitung eines solchen Buches die Zusammenstellung der ersten Sätze über Arcus-Variation zu sein — etwa in folgendem Ausmass und folgender Reihenfolge:

Satz 1. Sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ für $a \leqq t \leqq b$ definirte stetige Funktionen mit $\varphi^2 + \psi^2 = 1$, so gibt es eine mod. 2π eindeutig bestimmte *stetige* Funktion $k(t)$, für welche $\cos k(t) = \varphi(t)$, $\sin k(t) = \psi(t)$ ist; $k(b) - k(a)$ ist eindeutig bestimmt.

Satz 1a. Es seien $f(t)$ und $g(t)$ für $a \leqq t \leqq b$ definirte stetige Funktionen und (x_0, y_0) ein Punkt, für welchen $r(t) = +\sqrt{(f - x_0)^2 + (g - y_0)^2} > 0$ ist; dann gibt es eine mod. 2π eindeutig bestimmte stetige Funktion $k(t)$, für welche $r(t) \cos k(t) = f(t) - x_0$, $r(t) \sin k(t) = g(t) - y_0$ ist; $k(b) - k(a)$ ist eindeutig bestimmt.

Wir werden für das Vorhergehende auch sagen: Beobachtet man die Bewegung $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqq t \leqq b$ von (x_0, y_0) aus, so ist $k(t)$ eine Richtungs- oder Arcus-Funktion und $k(b) - k(a)$ die Richtungsänderung bei der Bewegung.

Satz 2. Gegeben sei die Bewegung $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqq t \leqq b$. Der Punkt (x_0, y_0) habe den Abstand $r_0 > 0$ von der

Bahnkurve, $k_0(t)$ sei eine Richtungsfunktion für den Beobachter in (x_0, y_0).

Es werde $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ beliebig angegeben. Man schlage um (x_0, y_0) den Kreis mit dem Radius $r_0 \sin \varepsilon$. Liegt dann (x_1, y_1) innerhalb dieses Kreises, so gibt es für den Beobachter in (x_1, y_1) eine Richtungsfunktion $k_1(t)$, für welche

$$| k_1(t) - k_0(t) | < \varepsilon \qquad (1)$$

gilt.

Die beiden von (x_0, y_0) und (x_1, y_1) zum Punkte $[f(t), g(t)]$ führenden Halbstrahlen bilden nämlich einen Winkel $< \varepsilon$. Man wähle nun diejenige Richtungsfunktion $k_1(t)$, für welche $| k_1(a) - k_0(a) | < \varepsilon$ ist; da $k_1(t) - k_0(t)$ nie $= \pm \varepsilon$ ist, gilt (1) für alle t.

Satz 2a. Die Arcus-Änderung einer bestimmten Bewegung ist eine stetige Funktion des Beobachtungspunktes.

Satz 2b. Die Arcus-Änderung einer *geschlossenen* Bewegung ist innerhalb eines durch die Bahnkurve bestimmten Gebietes eine Konstante.

Satz 3. Die Arcus-Änderung einer Bewegung ist beliebig klein, wenn der Beobachtungspunkt hinreichend weit liegt. Verlauft die Bewegung innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$, so ist die Richtungsänderung $< \varepsilon$, sobald der Beobachtungspunkt ausserhalb $(x^2 + y^2) \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = R^2$ liegt.

Satz 3a. Bei *geschlossener* Bewegung ist die Richtungsänderung Null, wenn der Beobachtungspunkt hinreichend weit liegt.

Satz 4. Der Beobachtungspunkt sei fixirt. Dann ist die Arcus-Änderung durch die Bahnkurve als Punktmenge nicht gegeben, sondern erst durch die Bewegung. Geht aber die Bewegung auf einem Jordan-Bogen vor sich,[1]) so ist die Arcus-Änderung durch Anfangs- und Endpunkt der Bewegung — unabhängig von der Bewegung — eindeutig bestimmt.

Es sei j ein Jordan-Bogen, $x = F(\tau)$, $y = G(\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq 1$ eine bestimmte, eineindeutige stetige Abbildung von j auf die Zeitstrecke $0 \leqq \tau \leqq 1$, $K(\tau)$ eine entsprechende Arcus-Funktion für (x_0, y_0). Auf diesem Bogen soll die Bewegung $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqq t \leqq b$ vor sich gehen. Dann ist τ eine eindeutige, stetige Funktion von t, etwa $\tau = \mu(t)$ und in $K[\mu(t)]$ hat man eine Arcus-

[1]) d. h. die Bahnkurve ist Teilmenge des Jordan-Bogens, wobei kinematisch-mehrfache Punkte zulässig sind.

Funktion der Bewegung. Die Arcus-Änderung $K[\mu(b)] - K[\mu(a)]$ ist also eindeutig bestimmt, sobald $\tau_1 = \mu(a)$ und $\tau_2 = \mu(b)$ gegeben sind.

Satz 4a. Die Arcus-Änderung bei einer auf einem Jordan-Bogen vor sich gehenden geschlossenen Bewegung ist Null.

Satz 5. Es seien

$$x = f(u, t),\ y = g(u, t),\ \alpha \leqq u \leqq \beta,\ a \leqq t \leqq b \tag{2}$$

stetige Funktionen, (x_0, y_0) ein Punkt, der von der Kurvenschar (2) die Entfernung $r_0 > 0$ hat. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig angegeben, so gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass für $|u_1 - u_2| < \delta$ die zu den Bewegungen $u = u_1$ und $u = u_2$ gehörigen, passend gewählten Arcus-Funktionen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Ungleichung

$$|k_1(t) - k_2(t)| < \varepsilon \tag{3}$$

erfüllen.

Hierzu ist δ nur so zu wählen, dass $[f(u_1, t) - f(u_2, t)]^2 + [g(u_1, t) - g(u_2, t)]^2 < r_0^2 \sin^2 \varepsilon$ sei, sobald $|u_1 - u_2| < \delta$ ist. Denn dann bilden die von (x_0, y_0) zu (u_1, t) und (u_2, t) führenden Halbstrahlen einen Winkel $< \varepsilon$. Wählt man also Arcus-Funktionen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ so, dass $|k_1(a) - k_2(a)| < \varepsilon$ ist, so gilt (3) für alle t.

Satz 5a. Bei Voraussetzungen des Satzes 5 bezeichne $K(u_0)$ die Arcus-Änderung bei der Bewegung $u = u_0$. Dann ist $K(u)$ eine für $\alpha \leqq u \leqq \beta$ definirte *stetige* Funktion.

Satz 5b. Bei denselben Voraussetzungen sei jede der Bewegungen $u = u_0$ geschlossen; dann ist $K(u)$ eine Konstante.

Satz 5c. Die Funktionen $x = f(u, t)$, $y = g(u, t)$, $\alpha \leqq u \leqq \beta$, $a \leqq t \leqq b$ seien stetig, jede der Bewegungen $u =$ konst. sei geschlossen, (x_0, y_0) habe positiven Abstand von den Kurven $u = \alpha$ und $u = \beta$. Sind dann die beiden von (x_0, y_0) aus beobachteten Richtungsänderungen bei den Bewegungen $u = \alpha$ und $u = \beta$ von einander verschieden, so liegt (x_0, y_0) auf einer der Kurven $u = u_0$, $\alpha < u_0 < \beta$.

Satz 6. Gegeben sind zwei geschlossene Bewegungen $x = f_1(t)$, $y = g_1(t)$, $x = f_2(t)$, $y = g_2(t)$, $a \leqq t \leqq b$ mit den Richtungsfunktionen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ für den Beobachtungspunkt (x_0, y_0). Die Richtungsänderungen betragen $2 n_1 \pi$ und $2 n_2 \pi$ mit ganzen n_1 und n_2. Ist $n_1 > n_2$, so enthält der Wertvorrat von $k(t) = k_1(t) - k_2(t)$ ein Intervall von der Länge $2(n_1 - n_2)\pi$. In der Tat ist $k(b) - k(a) = 2(n_1 - n_2)\pi$.

Satz 6a. Lässt $k(t)$ alle Werte $\equiv k_0 \pmod{2\pi}$ aus, so ist $n_1 = n_2$.

*

Nach diesem Arcus-Kapitel wäre der Teilungssatz für Polygone auf einem der vielen möglichen Wege zu erledigen. Da man nun die eben skizzirten Arcus-Sätze in der Länge doch nicht entbehren kann, kann man sie gleich gut dazu benutzen alles das Jordan-Polygon betreffende in Ordnung zu bringen, was auf diesem Wege sogar besonders einfach geht, etwa in folgenden Schritten: Indem man den Teilungssatz nur für das rechtwinkelige Viereck in Anspruch nimmt, zeigt man: 1°. Ist γ ein Gebiet, s eine Strecke, die bis auf einen Endpunkt γ angehört, so ist $(\gamma - s)$ ein Gebiet. 2°. Ist die Strecke s ein Querschnitt des Gebietes γ, so besteht $(\gamma - s)$ aus höchstens zwei Gebieten. Also: 3°. Ein Weg bestimmt in der Ebene *ein* Gebiet. 4°. Ein Jordan-Polygon bestimmt in der Ebene höchstens zwei Gebiete. Nun sei MN eine Seite des Jordan-Polygons $\mathfrak{P}$. Auf der Symmetrieaxe von MN wähle man symmetrisch zu MN die Punkte A und B so nahe aneinander, dass die Strecke AB nur ihren Mittelpunkt auf $\mathfrak{P}$ hat. Hiernach zeichne man ein (spitzwinkeliges) Dreieck PRQ, dessen Ecken P und Q innere Punkte von MN sind, so dass B innerhalb, A ausserhalb des Dreiecks liegt und das Dreieck nur die Punkte von PQ mit der Linie $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat. Ersetzt man in $\mathfrak{P}$ die Strecke PQ durch den Weg PRQ, so erhält man ein Jordan-Polygon $\mathfrak{P}'$. Werden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ — beide etwa im Sinne MPN — umlaufen und wird von A aus beobachtet, erhalte man die Arcus-Änderungen α und α', während der Beobachter in B die Änderungen β und β' konstatirt. Dann ist offenbar $\alpha = \alpha'$, (A liegt ausserhalb PRQ), $\alpha' = \beta'$, (AB trifft $\mathfrak{P}'$ nicht), aber $\beta = \beta' \pm 2\pi$ (B liegt innerhalb PRQ). Also ist $\alpha = \beta \pm 2\pi$ und man hat: 5°. Ein Jordan-Polygon bestimmt zumindest zwei, also genau zwei Gebiete. 6°. Bei Durchquerung einer (beliebigen) Polygonseite kommt man aus dem einen Gebiet ins andere. 7°. Die Arcus-Änderung beim Umlauf des Polygons beträgt 0 oder $\pm 2\pi$, jenachdem der Beobachtungspunkt im „äusseren", d. h. unbeschränkten oder „inneren", beschränkten Gebiet liegt.

*

Um weiter unten viel Worte zu sparen, seien noch folgende *Stetigkeitssätze* angeführt:

Satz 7. Gegeben sei ein Jordan-Bogen j und ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass der Durchmesser eines Teilbogens von j kleiner als ε ist, sobald die Endpunkte eine Entfernung $< \delta$ haben.

Da ferner ein Jordan-Bogen, der eine Teilmenge von j ausmacht, mit den Punkten A und B den ganzen Teilbogen AB von j enthält, gilt

Satz 8. Eine Jordan-Kurve kann keine Teilmenge eines Jordan-Bogens sein.

Der Satz 8 ist dem Inhalte nach der einfachste Fall des Satzes von der Invarianz der Dimensionszahl.

*

Mit diesen Hülfsmitteln beweise ich dann in einfachster Weise einen Satz, den man mit gutem Recht einen Hauptsatz der elementaren Topologie nennen kann.

Satz 9. Gegeben sei ein Jordan-Bogen j und ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Jordan-Polygon $\mathfrak{P}_0$, das j im Innern enthält, während alle Punkte, deren Entfernung von Bogen $> \varepsilon$ ist, ausserhalb $\mathfrak{P}_0$ liegen.

Konstruktion eines $\mathfrak{P}_0$: Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck, das j im Innern enthält und teile es in ein Netz von 4^n kongruenten Dreiecken. Das Netz wähle man so fein, dass 1. die Seite d eines Netzdreieckes $< \varepsilon$ sei; 2. auch so klein, dass der Durchmesser eines Teilbogens von j kleiner als ε sei, sobald der Abstand der Endpunkte $< 2d$ ist (Satz 7). In diesem Netz zeichne man ein Jordan-Polygon $\mathfrak{P}$, das aus Seiten von Netzdreiecken besteht und j im Innern enthält. $\mathfrak{P}$ enthalte m Netzdreiecke, m_0 sei die kleinste der Zahlen m, $\mathfrak{P}_0$ sei ein $\mathfrak{P}$, das zu m_0 passt. Dann hat $\mathfrak{P}_0$ die behauptete Eigenschaft.[2])

---

[2]) Ich möchte den geneigten Leser aufmerksam machen, dass das eben angewandte Verfahren, $\mathfrak{P}_0$ durch die Minimalzahl der Netzdreiecke festzulegen, bei vielen ähnlichen Fragen vorzüglich anwendbar ist. Als Beispiel wähle ich einen Satz, der ebenfalls den Charakter eines fundamentalen Satzes hat, nämlich den folgenden: Zwei beschränkte, fremde Kontinua α und β können durch ein Jordan-Polygon getrennt werden.

Alle mir bekannten Beweise arbeiten mit gestaltlichen Fallunterscheidungen. Man erhält den Satz, wie mir scheint, auf dem einfachsten Wege wie folgt:

Die Entfernung von α und β ist $d > 0$. Man zeichne ein Dreieck, dessen Inneres $(\alpha + \beta)$ aufnimmt, teile es in ein Netz von 4^n kongruenten Dreiecken

Beweis: Die Eckpunkte von $\mathfrak{P}_0$ seien $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1} = A_1$. ($A_i A_{i+1}$ hat die Länge d; es können mehr als zwei zyklisch aufeinander folgende A_i auf einer Geraden liegen.) $A_1 A_2 P$ sei dasjenige Netzdreieck mit der Seite $A_1 A_2$, dessen Inneres innerhalb $\mathfrak{P}_0$ liegt. Dann ist entweder der Weg $A_1 P A_2$, oder eine der Dreiecksseiten ein innerer Querschnitt von $\mathfrak{P}_0$.[3]) Dieser Querschnitt enthält einen Punkt von j. Sonst wäre j ganz innerhalb eines der Polygone, die durch den Querschnitt aus $\mathfrak{P}_0$ hervorgehen, was mit der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{P}_0$ unvereinbar ist. Es sei B_1 ein ganz bestimmt gewählter Punkt von j auf dem Weg $A_1 P A_2$. Entsprechend wählen wir Punkte $B_2, B_3, \ldots, B_n$. Der letzte liegt im Grenzdreieck mit der Seite $A_n A_1$. Jede der Strecken $B_1 B_2$ $B_2 B_3, \ldots,$ $B_n B_1$ ist $< 2d$, also hat jeder Teilbogen $\widehat{B_1 B_2}$, $\widehat{B_2 B_3}, \ldots, \widehat{B_n B_1}$ von j einen Durchmesser $< \varepsilon$.

Nun durchlaufe ein Punkt das Polygon $\mathfrak{P}_0$. Während dieser die Polygonseite $A_i A_{i+1}$ beschreibt, soll ein attachirter Punkt den Bogen $\widehat{B_i B_{i+1}}$ durchlaufen. Diese zwei geschlossenen Bewegungen seien durch

$$x = f_1(t), y = g_1(t), \; x = f_2(t), \; y = g_2(t), \; a \leqq t \leqq b \qquad (4)$$

dargestellt. $M(x_0, y_0)$ habe eine Entfernung $> \varepsilon$ von j; dann liegt M nicht auf $\mathfrak{P}_0$ und beide Bewegungen können von M aus beobachtet werden; $k_1(t)$ und $k_2(t)$ seien zwei zugehörige Arcus-Funktionen. Die Differenz $k_1(t) - k_2(t)$ lässt alle Werte $\equiv \pi \pmod{2\pi}$ aus; denn ein Kreis um B_i mit dem Radius ε enthält $\widehat{B_i B_{i+1}}$ und $A_i A_{i+1}$, während M ausserhalb dieses Kreises liegt. Folglich ist die Arcus-Änderung für die beiden Bewegungen (4) dieselbe (Satz 6a); sie ist Null für die auf dem Jordan-Bogen vorsichgehende (Satz 4a), also auch beim Umlauf von $\mathfrak{P}_0$ und so liegt M *ausserhalb* $\mathfrak{P}_0$.

---

so dass jede Seite eines Netzdreieckes $< \frac{d}{2}$ sei. $\mathfrak{P}_\alpha$ sei ein Netzpolygon, dessen Inneres α enthält und das nur die kleinstmögliche Anzahl von Netzdreiecken enthält; entsprechendes bedeutet $\mathfrak{P}_\beta$. Infolge der Minimalforderung enthält jedes Grenzdreieck von $\mathfrak{P}_\alpha$ Punkte von α; also schliesst man aus der Feinheit des Netzes, dass $\mathfrak{P}_\alpha$ weder β noch $\mathfrak{P}_\beta$ trifft; liegt β ausserhalb $\mathfrak{P}_\alpha$, so ist $\mathfrak{P}_\alpha$ ein trennendes Polygon. Im andern Fall besteht $\mathfrak{P}_\beta$ aus weniger Dreiecken, als $\mathfrak{P}_\alpha$ und trifft nicht α, so dass α ausserhalb $\mathfrak{P}_\beta$ liegt.

[3]) Sonst hat man den trivial einfachen Fall $m_0 = 1$.

Satz 9a. Ein Jordan-Bogen bestimmt in der Ebene *ein* Gebiet.

Satz 9b. Gehört j ganz einem Gebiete an, so ist *$(\gamma - j)$ ein* Gebiet.

Jede um einen Punkt von j beschriebene Kreislinie enthält Punkte, die nicht zu j, sondern zu dem durch j bestimmten Gebiete gehören. Also gilt

Satz 10: Jeder Punkt von j ist Grenzpunkt des durch j bestimmten Gebietes.

Es sei J eine Jordan-Kurve, j ein Teilbogen von J, P ein Punkt, der nicht auf J liegt. Dann hat das durch J bestimmte, P enthaltende Gebiet Grenzpunkte auf j. Es sei nämlich Q ein innerer Punkt von j. Man konstruire ein Polygon $\mathfrak{P}_0$, das $(J-j)$ im Innern enthält, während P und Q ausserhalb des Polygons liegen. Man wandere auf einem Weg, der ausserhalb $\mathfrak{P}_0$ verläuft, von P nach Q und stosse zuerst in R auf einen Punkt von j; dann ist R ein Grenzpunkt von der behaupteten Art. Da die Grenze eines Gebietes abgeschlossen ist, hat man

Satz 11: Jeder Punkt von J ist Grenzpunkt eines *jeden* durch J bestimmten Gebietes.

*

Um nun den Teilungssatz zu beweisen, betrachten wir zunächst die folgende, besonders einfache Figur:

Ein Jordan-Bogen j habe die Endpunkte in $M(-a, 0)$ und $N(+a, 0)$. Alle übrigen Punkte von j liegen *innerhalb* des Vierecks mit den Endpunkten $A(+a, +b)$, $B(-a, +b)$, $C(-a, -b)$, $D(+a, -b)$.

Satz 12. Das Innere des Vierecks wird durch j in zwei Gebiete zerschnitten.

Es sei P ein Punkt innerhalb des Vierecks, aber nicht auf j, $\mathfrak{P}$ ein Polygon, das j im Innern enthält und j von P trennt. Man durchlaufe die Strecke von P nach M bis zum ersten Schnittpunkt mit dem Polygon, von diesen aus setze man den Weg längs des Polygons fort bis zum ersten Treffpunkt mit dem Viereck. Hat dieser ein positives y, so gehört P demjenigen Gebiet an, das an AB heranreicht, sonst demjenigen, das an CD anstosst. Also bestimmt j innerhalb des Vierecks *höchstens* zwei Gebiete.

Man wähle innerhalb des Vierecks Punkte A_1 und D_1 so nahe an A und D, dass die aus A_1 beobachtete Arcus-Änderung beim Umlauf der Jordan-Kurve $MCDNM$ und die aus D_1 beobachtete

Richtungsänderung beim Umlauf von $MNABM$ gleich Null sind. Nun durchlaufe ein Punkt die Linie $MCDNMNABM$ und man beobachte aus A_1. Die Richtungsänderung beträgt 2π, da von NMN abgesehen das Viereck positiv umlaufen wurde. Daher ist die Arcus-Änderung beim Umlauf von $MNABM$ gleich 2π oder 0, jenachdem von A_1 oder D_1 aus beobachtet wird. A_1 und D_1 gehören verschiedenen innerhalb des Vierecks durch j bestimmten Gebieten an; die Anzahl dieser Gebiete ist genau zwei. Unter dem oberen, resp. unteren Gebiet werden wir das an AB, resp. CD anstossende verstehen.

Nun sei J eine Jordan-Kurve, MN ein Diameter der Kurve; die beiden von M und N begrenzten Teilbogen sollen p und q heissen. Wir wählen ein Koordinatensystem so, dass M und N die Koordinaten $(-a, 0)$ und $(+a, 0)$ erhalten. Die übrigen Punkte von J liegen im Gebiet $|x| < a$, $|y| < b$. Unter A, B, C, D verstehen wir dasselbe, wie zuvor.

Der tiefste Schnittpunkt der Jordan-Kurve mit $x = 0$ heisse P, der höchste Q Dann werden P und Q auf der Kurve durch M und N getrennt. Wären P und Q beide z. B. auf p, so wäre ja Q im oberen, P im unteren Gebiet von q gelegen und der Teilbogen PQ von p müsste Q treffen. Es liege etwa P auf p und Q auf q. Mit P liegt p im unteren Gebiet von q, mit Q liegt q im oberen Gebiet von p.

Satz 13. Es gibt Punkte, die gleichzeitig im oberen Gebiet von p und im unteren von q liegen.

Es sei P_1 der höchste Schnittpunkt von p und $x = 0$, Q_1 der tiefste Schnittpunkt von q mit der Strecke P_1Q. Jeder Punkt zwischen P_1 und Q_1 hat die behauptete Eigenschaft.

Satz 14. Es sei T ein willkürlich gewählter Punkt, der dem unteren Gebiet von q und gleichzeitig dem oberen von p angehört. Wird die Jordan-Kurve in der Richtung $MPNQM$ durchlaufen, so ist die von T aus beobachtete Arcus-Änderung 2π.

Im unteren Gebiet von q wandere man von T nach P, dann von P aus auf $x = 0$ beliebig weit nach unten. Hierbei wird die Jordan-Kurve $NABMQN$ nichts getroffen. Also ist die von T aus beobachtete Arcus-Änderung längs $NABM$ dieselbe, wie längs NQM (Satz 2b und 3a); ebenso längs $MCDN$ dieselbe, wie längs MPN. Beim Umlauf des Vierecks ist die Richtungsänderung 2π, also auch beim Umlauf von J.

Durch neuerliche Anwendung der Sätze 2b und 3a schliesst man:

Satz 15. Die Jordan-Kurve J bestimmt *zumindest* zwei Gebiete.

Satz 16. J bestimmt höchstens zwei Gebiete.

Die Punkte ausserhalb und auf dem Viereck $ABCD$, die im oberen Gebiet von q und im unteren von p gehören zu *einem* durch J bestimmten Gebiete γ. Es sei nun T ein Punkt, der nicht zu γ gehört, sondern unterhalb q und oberhalb p liegt. In dem T enthaltenden, durch J bestimmten Gebiete π wähle man M_1 und N_1 so nahe an M und N (Satz 11), dass die von M_1 aus beobachtete Arcus-Änderung beim Umlauf der Jordan-Kurve $Q_1P_1NQ_1$ und die von N_1 aus beobachtete Richtungsänderung längs MP_1Q_1M gleich Null seien. Innerhalb π führen wir einen Weg w von M_1 nach N_1. Wir wollen zeigen, dass w die Strecke P_1Q_1 trifft, woraus Satz 16 folgt.

Beobachtet man von M_1 aus die Arcus-Änderung längs MP_1NQ_1M, oder, was dasselbe ist, längs $MP_1Q_1P_1NQ_1M$, so beträgt diese 2π (Satz 14). Längs $Q_1P_1NQ_1$ ist die Variation Null, also längs MP_1Q_1M beträgt sie 2π. Längs derselben Kurve ist die von N_1 aus beobachtete Richtungsänderung Null, also muss w die Kurve MP_1Q_1M treffen, was nur auf P_1Q_1 erfolgen kann.

*

Bei der obigen Beweisanordnung hat man mit dem Teilungssatz gleichzeitig die Sätze über Arcus-Änderung beim Umlauf der Jordan-Kurve miterhalten. Es ist dann ein leichtes etwa folgende Sätze zu beweisen: Ein Querschnitt zerschneidet das Innere einer Jordan-Kurve in zwei Gebiete. Zwei innere Querschnitte treffen sich, wenn sich ihre Endpunkte auf der Jordan-Kurve trennen. Sind a, b und c drei Jordan-Bogen, die zu zweien eine Jordan-Kurve bilden, so gibt es einen und nur einen unter diesen, der innerhalb der durch die beiden andern gebildeten Jordan-Kurve liegt, etc. etc.

Für die weitergehende Untersuchung der Jordan-Kurve hat man ein gutes Hülfsmittel im folgenden

Satz 17. Haben die Jordan-Kurven a und b zumindest zwei gemeinsame Punkte, so wird jedes durch $(a+b)$ bestimmte Gebiet durch eine Jordan-Kurve begrenzt.

Beweis: Um Worte zu sparen, werde gleich vorausgesetzt, dass b in das Innere von a eindringt und wir betrachten ein durch

b innerhalb a bestimmtes Gebiet π. Es sei P ein Punkt dieses Gebietes. Von P aus führen wir einen Weg innerhalb a, der b trifft; der erste Treffpunkt mit b heisse Q.

Die Punkte von b innerhalb a bilden eine endliche oder abzählbare Folge von Querschnitten des Inneren von a. Der erste Fall ist uninteressant einfach. Betrachten wir also den zweiten und sei

$$q_0, q_1, q_2, \ldots\ldots \tag{5}$$

die Folge dieser Querschnitte; ein innerer Punkt eines q_i gehört keinem q_k, $i \gtrless k$ an; q_0 sei derjenige Querschnitt, der Q enthält; q_0 teilt a in die Bogen a_1 und a_2; P und π liegen innerhalb $(a_1 + q_0)$ oder $(a_2 + q_0)$, sie sollen z. B. innerhalb $(a_1 + q_0)$ liegen.

Beide Endpunkte von q_i, $i > 0$ liegen auf einem der (abgeschlossenen) Bogen a_1 und a_2, und begrenzen einen Teilbogen von a_1 resp. a_2, den ich den Stützbogen von q_i nennen will. Ein q_i, dessen Stützbogen auf a_2 fällt, verlauft ausserhalb $(a_1 + q_0)$. Solche q_i werde aus der Folge (5) gestrichen; es bleibt die Folge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots \tag{6}$$

zurück; in dieser wird wiederum ein r_i gestrichen, wenn der Stützbogen von r_i den (echten) Teil des Stützbogens eines anderen r_k ausmacht; zurückbleibt dabei die Folge

$$t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots \tag{7}$$

von Querschnitten mit den Stützbogen

$$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots \tag{7a}$$

Die (nicht abgeschlossenen) Bogen s_i und s_k, $i \gtrless k$ haben keinen gemeinsamen Punkt.

Ersetzt man in a_1 den Bogen s_i durch t_i, so erhält man eine Punktmenge a'. Wir wollen zeigen, dass a' ein Jordan-Bogen ist.

Man statuire nämlich topologische Abbildungen zwischen den einzelnen s_i und t_i, die die gemeinsamen Endpunkte zu Fixpunkten haben. Dann hat man eine eineindeutige Abbildung zwischen a_1 und a'; es ist zu zeigen, dass diese stetig ist. Wir wollen den Beweis z. B. für die „Stetigkeit nach rechts“ durchführen. Die rechtsseitige Stetigkeit der Abbildung $a_1 \rightarrow a'$ ist evident für den Anfangs- oder inneren Punkt eines s_i. Nun sei T kein solcher Punkt von a_1; er fällt mit seinem Bilde T' zusammen. Es werde $\varepsilon > 0$ beliebig angegeben. Da die Abbildung einer Jordan-Kurve auf die Kreislinie *gleichmässig* stetig ist, wird es nur eine endliche Anzahl i geben, für welche der Durchmesser von s_i oder t_i, also der von

$(s_i + t_i)$ grösser als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Die zugehörigen s_i seien irgendwie markirt. Nun wähle man einen Punkt U auf a_1 rechts von T so, dass der Durchmesser des Teilbogens $\widehat{TU}$ von a_1 kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sei und dass $\widehat{TU}$ noch keinen Punkt eines markirten s_i enthalte. Liegt dann R auf $\widehat{TU}$, so ist $T'R' < \varepsilon$, d. h. die Abbildung ist in T stetig nach rechts.

Somit haben wir in $(a' + q_0)$ eine Jordan-Kurve p, die eine Teilmenge von $(a + b)$ ist; kein Punkt von a liegt innerhalb p; aber auch keiner von b. Denn ein Punkt von b, der innerhalb $(a_1 + q_0)$, doch nicht auf p liegt, ist Punkt eines *gestrichenen* r_i, dessen Stützbogen also wirklicher Teil eines s_k, $i \gtrless k$ ist. Derjenige Endpunkt von r_i, der innerer Punkt von s_k ist, liegt ausserhalb p und da der offene Bogen kein t_j trifft, liegt r_i ganz ausserhalb p.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass P innerhalb p liegt. Ein Punkt durchlaufe a_1, sein Bildpunkt a'. Beide Bewegungen werden aus P beobachtet; die zwei Arcus-Änderungen stimmen überein. Denn man kann von P nach Q, von Q beliebig weit gelangen, ohne die Kurve $(a_1 + a')$ zu treffen. Durchlauft man $(a_1 + q_0)$ und beobachtet aus P, so ist die Arcus-Änderung $\pm 2\pi$, dasselbe gilt also beim Umlauf von $(a' + q_0)$; P liegt innerhalb p und p ist die Grenze von π.

Satz 18. Die Jordan-Kurven a und b haben zumindest zwei Punkte gemein; Q sei ein Punkt von b, der (z. B.) innerhalb a liegt. Dann gibt es genau zwei durch $(a + b)$ bestimmte Gebiete, die Q zum Grenzpunkt haben; eines liegt innerhalb, das andere ausserhalb b.

Es sei q_0 derjenige Bogen von b, der Q enthält und einen inneren Querschnitt von a bildet; a_1 und a_2 bedeute dasselbe, wie zuvor. Nach der zuvor beschriebenen Konstruktion bilden wir a' als Abbild von a_1 und a'' als Abbild von a_2; a' liegt ausserhalb $(a_2 + q_0)$, a fortiori ausserhalb $(a'' + q_0)$; a' liegt ausserhalb $(a' + q_0)$; folglich liegt q_0 und speziell Q innerhalb $(a' + a'')$. Jedes durch $(a + b)$ bestimmte, an Q heranreichende Gebiet liegt also innerhalb $(a'' + a'')$. Es gibt aber nur zwei solche Gebiete: das Innere von $(a' + q_0)$ und das von $(a'' + q_0)$. Aus Satz 11 folgt dann, dass eines dieser Gebiete innerhalb, das andere ausserhalb b liegt.

Satz 19. (Glattheit der Jordan-Kurve.) Gegeben sei eine Jordan-Kurve b, ein Punkt Q auf b und ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass zwei innere oder zwei äussere Punkte von b, die der δ-Umgebung von Q angehören, durch eine stetige, b nicht treffende, die ε-Umgebung von Q nicht verlassende Linie verbunden werden können.

Als Kurve a wählen wir den Kreis um Q mit dem Radius ε_1 (das wir kleiner als den Durchmesser von b voraussetzen); wir können nun nicht nur die Existenz eines brauchbaren δ einsehen, sondern das bestmögliche δ direkt angeben; dieses ist der Radius des grösstmöglichen, um Q' beschriebenen, aus $(a' + a'')$ nicht heraustretenden Kreises.[4])

Aus der Glattheit folgt dann bekanntlich der Satz von der stetigen Erreichbarkeit; und es ist sofort ersichtlich, dass man mit den obigen Mitteln Glattheit und Erreichbarkeit für *innere* Punkte des Jordan-Bogens zeigen kann. Diese Sätze für die *Endpunkte* des Bogens nachzuweisen erfordert einen etwas grösseren Apparat, auf den ich hier nicht eingehe.[5])

Um die reiche Anwendbarkeit namentlich von Satz 5c zu zeigen, beweise ich

Satz 20. Das topologische Bild eines Gebietes ist wieder ein Gebiet. Es seien $O(x = 0,\ y = 0)$ und $O'(x' = 0,\ y' = 0)$ zwei entsprechende Punkte; durchlauft (x, y) den Kreis

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ r > 0,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi, \tag{8}$$

so möge der Bildpunkt die Jordan-Kurve

$$x' = f(r, t),\ y' = g(r, t),\ 0 \leqq t \leqq 2\pi$$

umlaufen. Es sei nun (x'_0, y'_0) ein von $(x' = 0,\ y' = 0)$ verschiedener, sonst beliebiger Punkt innerhalb der Kurve

$$x' = f(\beta, t),\ y' = g(\beta, t),\ 0 \leqq t \leqq 2\pi. \tag{9}$$

Wir wählen α so klein, dass die Bewegung

$$x' = f(\alpha, t),\ y' = g(\alpha, t),\ 0 \leqq t \leqq 2\pi \tag{10}$$

in einem Kreise um $(x' = 0,\ y' = 0)$, welcher (x'_0, y'_0) nicht enthält, vor sich geht. Beobachtet man die Bewegungen (9) und (10)

---

[4]) Vgl. *C. Carathéodory,* Ueber die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordankurve auf einen Kreis, Mat. Ann., Band 73, S. 315.

[5]) Diesen ausführlicheren Apparat und einiges vom hier dargestellten skizzirte ich kurz in einer Note, die in der von den dänischen Matematikern Prof. J. Hjelmslev gewidmeten Festschrift erschien. S. Matem. Tidskr. 1923.

von (x'_0, y'_0) aus, so ist die Arcus-Änderung $\pm 2\pi$ resp. 0, so dass (x'_0, y'_0) auf einer Kurve

$$x' = f(r, t),\ y' = g(r, t),\ \alpha < r < \beta,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

liegt, d. h. Bild eines Punktes (x_0, y_0) mit $x_0^2 + y_0^2 < \beta^2$ ist. Mit (x'_0, y'_0) liegt das Bild der ganzen Scheibe $x^2 + y^2 < \beta^2$ innerhalb (9) und erfüllt das Innere dieser Kurve.

Zum Schluss möchte ich einen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra mitteilen, der sich ebenfalls auf Satz 5c stützt. Dieser Beweis war einer älteren Generation wohlbekannt, scheint aber nun in Vergessenheit geraten zu sein. Unter allen Beweisen, die ich kenne, ist dieser der einzige, der von Anfang bis zu Ende in der Anschauung verfolgt werden kann; er lässt sich ganz leicht in die $\varepsilon - \delta$-Form einkleiden.[6])

Satz. Es sei

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_n \neq 0.$$

Dann gibt es ein $z = z_0$, für welches $P(z_0) = 0$ ist.

Durchlauft $z = x + iy$ den Kreis

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ r > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

so führt $z' = P(z) = x' + iy'$ die Bewegung

$$x' = f(r,t),\ y' = g(r,t),\ 0 \leq t \leq 2\pi \tag{11}$$

aus; des weiteren setze man

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right) = \\ &= r^n (\cos nt + i \sin nt) \left[\varphi(r,t) + i\psi(r,t)\right] \end{aligned} \tag{12}$$

Nun wähle man $r = \alpha > 0$ so klein, dass die Bewegung

$$x' = f(\alpha,t),\ y' = g(\alpha,t),\ 0 \leq t \leq 2\pi \tag{13}$$

in einem so kleinen Kreis um $a_n \neq 0$ verlaufe, dass dieser Kreis $(x' = 0, y' = 0)$ nicht enthält, und man wähle β so gross, dass die Bewegung

$$x' = \varphi(\beta, t),\ y' = \psi(\beta, t),\ 0 \leq t \leq 2\pi \tag{14}$$

in einem Kreise um $(x' = 1, y' = 0)$ verlaufe, der wiederum $(x' = 0, y' = 0)$ nicht enthält. Die von $(x' = 0, y' = 0)$ aus beobachtete Richtungsänderung längs (13) und längs (14) ist dann Null.

---

[6]) Diesen Beweis kann ich in keinem der im Encyklopedie-Artikel „Netto, Fundamentalsatz" referirten wiedererkennen; seine Kenntnis verdanke ich der mündlichen Mitteilung des vor kurzem verstorbenen Direktors der dänischen Gradmessung Kaptejn Dr. phil. F. Buchwaldt.

Aus dem letzteren Umstande folgt, dass die Richtungsänderung bei der Bewegung

$$x' = f(\beta, t),\ y' = g(\beta, t),\ 0 \leqq t \leqq 2\pi \qquad (15)$$

$2n\pi$ beträgt. Denn ist etwa $l(t)$ eine zu (14) gehörige Arcus-Funktion, so ist laut (12) $l(t) + nt$ eine zu (15) gehörige. Lau 5c liegt also $(x' = 0,\ y' = 0)$ auf einer Kurve

$$x' = f(r_0, t),\ y' = g(r_0, t),\ \alpha < r_0 < \beta,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi, \text{ qu. e. d.}$$

*

Nach diesen reichlichen Anwendungen der ebenen Arcus-Funktion stellt man sich natürlich folgendes Problem: Gibt es eine räumliche Arcus-Funktion, d. h. eine Funktionale

$$F = F(\alpha, \beta, a, b, f, g, h, x_0, y_0, z_0),$$

welches für jede Fläche

$$x = f(u, t),\ y = g(u, t),\ z = h(u, t),\ \alpha \leqq u \leqq \beta,\ a \leqq t \leqq b$$

definirt ist, solange diese den Punkt (x_0, y_0, z_0) nicht enthält, die sich bei stetiger Deformation der Fläche oder stetiger Bewegung des Beobachtungspunktes stetig ändert und die für geschlossene Flächen (deren Begriff freilich in der sorgfältigsten Weise zu umschreiben wäre) nur gewisse discrete Werte annehmen kann?

Über dieses interessante und gewiss lebensfähige Problem liegt meines Wissens nichts abschliessendes und allgemeines vor.

Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete.

Von Tibor Radó in Szeged.

Einleitung.

Die Herrn *L. Fejér* und *F. Riesz* teilten mir eine neue Beweisanordnung für den fundamentalen Satz mit, dass jedes einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene mit wenigstens zwei Randpunkten umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere eines Kreises abgebildet werden kann. Mit der freundlichen Erlaubnis der genannten Herrn teile ich ihren Beweis gleich in dieser Einleitung mit. Die weiteren Entwicklungen dieser Arbeit bezwecken, mit Hilfe einer sinngemässen Erweiterung der *Fejér-Riesz*schen Methode, das Grenzkreistheorem für das allgemeinste schlichte Gebiet zu begründen.[1])

Was die Einzelheiten der Darstellung anbelangt, so ist dabei die von Herrn *Bieberbach*[2]) aufgestellte Forderung bestimmend gewesen, dass nämlich das Grenzkreistheorem rein funktionentheoretisch, also ohne potentialtheoretische und topologische Überlegungen begründet werden soll. Im speciellen Falle, mit welchem wir uns allein beschäftigen werden, nämlich im Falle eines gewöhnlichen schlichten Gebietes, gelingt es tatsächlich, dieser Forderung gerecht zu werden.

---

[1]) Die beiden genannten Theoreme sind vielfach behandelt worden, für uns kommen hauptsächlich die beiden ersten *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung* des Herrn *Koebe* in Betracht (Abh. I, Journal für Math. Bd. 145. und Abh. II, Acta mathematica Bd. 40.) auf welche wir auch wegen Literaturangaben verweisen, ferner die Arbeit des Herrn *Carathéodory* in der *Schwarz*-Festschrift: Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen.

[2]) *L. Bieberbach,* Über die Einordnung des Hauptsatzes der Uniformisierung in die Weierstrassische Funktionentheorie, Math. Annalen 78.

Die Fejér-Rieszsche Beweisanordnung.

Sei G ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet, welches den Nullpunkt im Innern enthält. Wir betrachten die Gesamtheit der in G eindeutigen, regulären, schlichten und beschränkten Funktionen $f(z)$, welche im Nullpunkte verschwinden und die Ableitung 1 haben (eine solche Funktion ist z. B. z selbst). Mit $M(f)$ werde die obere Grenze des absoluten Betrages von $f(z)$ in G bezeichnet, und ϱ sei die untere Grenze aller $M(f)$.

Es gibt dann eine Folge

$$f_1(z), f_2(z), \dots f_n(z), \dots$$

für welche $M(f_n) \rightarrow \varrho$. Da die Folge gleichmässig beschränkt ist, so enthält dieselbe eine unendliche Teilfolge, welche in jedem abgeschlossenen Teilgebiete von G gleichmässig konvergiert. Sei $f(z)$ die Grenzfunktion. Diese ist in G regulär, im Nullpunkte ist $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Da mithin $f(z)$ nicht konstant ist, so ist sie schlicht in G, als gleichmässige Grenzfunktion von schlichten Funktionen. Ferner ist offenbar $M(f)=\varrho$.

Die Funktion $f(z)$ entwirft also von G ein Bild, welches ganz im Kreise mit dem Halbmesser ϱ und mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt enthalten ist. Wir können aber zeigen, dass das Bildgebiet das Innere dieses Kreises vollständig ausfüllt. Wäre dies nicht der Fall, so würde es einen Wert $re^{i\varphi}$ mit $r<\varrho$ geben, welchen unsere Funktion $f(z)$ in G nicht annimmt. Dann können wir aber mit Hilfe der *Carathéodory-Koebe*schen Quadratwurzeltransformation aus $f(z)$ eine Funktion $F(z)$ ableiten, welche ebenfalls der eingangs erklärten Klasse angehört und für welche $M(F)<M(f)$ ist, was aber wegen $M(f)=\varrho$ ein Widerspruch ist. Damit ist bewiesen, dass die Extremalfunktion $f(z)$ das Gebiet G tatsächlich auf das Innere des Kreises abbildet, welcher den Nullpunkt zum Mittelpunkte und den Halbmesser ϱ hat.

Zur erwähnten Funktion $F(z)$ gelangen wir auf die folgende Weise. Wir führen zunächst Funktionen $t(z)$, $u(z)$, $v(z)$, $w(z)$ ein, welche alle in G eindeutig, regulär, schlicht und absolut kleiner als 1 sind:

$$t=\frac{1}{\varrho e^{i\varphi}}f;\quad u=\frac{t-\beta}{\beta t-1},\ \text{wo}\ \beta=\frac{r}{\varrho};\quad v^2=u\ \text{mit}\ v(0)=\beta^{1/2};$$

$$w=\frac{v-\beta^{1/2}}{\beta^{1/2}v-1}.$$

Insbesondere wird v in G eindeutig sein, weil u dort nicht verschwindet und weil G einfach zusammenhängt. Nach einer einfachen Rechnung erhalten wir:

$$w'(0) = \frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} \frac{1}{\varrho e^{i\varphi}}.$$

Für die Funktion

$$F(z) = \frac{2\beta^{1/2}}{\beta+1} \varrho e^{i\varphi} w(z)$$

haben wir folglich $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ und wegen $|w| < 1$ noch $M(F) \leq \frac{2\beta^{1/2}}{\beta+1} \varrho$. Da $0 < \beta < 1$ ist, so ist $\frac{2\beta^{1/2}}{\beta+1} < 1$, also $M(F) < \varrho$, wie wir es haben wollten.

§ 1.

Vorbereitungen.

1. Sei G ein Gebiet der komplexen Zahlenebene, welches den unendlichfernen Punkt nicht im Innern enthält. Wenn ein Funktionselement längs aller Wege in G fortgesetzt werden kann, so werden die sämtlichen Fortsetzungen desselben i. A. keine in G eindeutige Funktion ergeben. Ist dies aber für alle innerhalb G unbegrenzt fortsetzbare Funktionselemente der Fall, so heisse G einfach zusammenhängend. Diese Eigenschaft ist gegenüber konformer Abbildung offenbar invariant, d. h. sind G, G' zwei Gebiete, welche ein-eindeutig konform aufeinander abgebildet werden können, so werden sie gleichzeitig einfach zusammenhängen oder nicht. Wir stellen zunächst fest, dass die Kreisscheibe einfach zusammenhängt. Dies ist eigentlich, wie mir Herr *Koebe* bemerkte, nur eine Ausdrucksweise für den Satz, dass am Rande des wahren Konvergenzkreises einer Potenzreihe wenigstens ein singulärer Punkt liegt. Sei nämlich $f(z)$ eine in der Umgebung des Mittelpunktes reguläre Funktion, welche längs aller Wege auf der Kreisscheibe fortgesetzt werden kann. Wir betrachten die Potenzreihe derselben für den Mittelpunkt und behaupten, dass der wahre Konvergenzradius derselben nicht kleiner sein kann, als der Radius der Kreisscheibe. Denn am Rande des wahren Konvergenzkreises liegt wenigstens ein solcher Punkt, dass $f(z)$ über denselben hinaus nicht fortgesetzt werden kann. Da nun die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ auf der ganzen Kreisscheibe konvergiert, so definiert dieselbe eine auf der Scheibe eindeutige reguläre Funktion, welche in der Umgebung des Mittelpunktes mit $f(z)$ übereinstimmt, und folglich die Fortsetzungen von $f(z)$ liefert. Dieselbe Schlussweise lässt auch den einfachen Zusammenhang der ganzen endlichen Ebene erkennen.

2. Wir betrachten nun ein Gebiet G, welches den unendlichfernen Punkt nicht enthalten soll, sonst aber ganz beliebig ist, und bezeichnen mit $\Sigma(G)$ die Gesamtheit der (i. A. mehrdeutigen) Funktionen, welche längs aller Wege in G regulär fortgesetzt werden können. Eine solche Funktion heisst schlicht, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist $A(z)$ ein Element von $f(z)$ mit dem Mittelpunkte a, und $B(z)$ ein Element mit dem Mittelpunkte b, so ist immer $A(a) \neq B(b)$, wenn $a \neq b$ ist. Man sieht sofort: ist $f(z)$ schlicht in G, und sind $A_1(z)$ und $A_2(z)$ zwei nicht identische Elemente von $f(z)$ mit demselben Mittelpunkte a, so ist $A_1(a) \neq A_2(a)$. Ist ferner T das Gebiet der von $f(z)$ in G angenommenen Werte, so ist die Umkehrfunktion von $f(z)$ in T eindeutig.

Ist $f(z)$ schlicht in G, und ist ihr Wertegebiet einfach zusammenhängend, so heisst $f(z)$ eine *Uniformisierende* von G. Die fundamentale Eigenschaft einer solchen besteht im folgenden. Sei a ein Punkt von G, $A(z)$ ein Element von $f(z)$ mit diesem Mittelpunkte, und $F(z)$ ein Funktionselement mit demselben Mittelpunkte, welches längs aller Wege in G regulär fortgesetzt werden kann. Das Wertegebiet von $f(z)$ heisse wieder T, wir denken uns dasselbe in einer x-Ebene gelegen. Durch $x = A(z)$ wird die Umgebung von a ein-eindeutig konform auf eine Umgebung von $A(a)$ abgebildet, und wenn wir $F(z)$ mit hinüberpflanzen, so erhalten wir eine in dieser Umgebung eindeutige reguläre Funktion $\Phi(x)$. Da die Umkehrfunktion von $f(z)$ in T eindeutig ist, und $A(z)$, $F(z)$ in G überall fortgesetzt werden können, so ergibt sich sofort, dass $\Phi(x)$ längs aller Wege in T fortgesetzt werden kann. Weil aber nach Voraussetzung T einfach zusammenhängt, so folgt hieraus, dass $\Phi(x)$ in T eindeutig ist. In der Umgebung des Punktes a besteht aber die Gleichung:

$$F(z) = \Phi[f(z)],$$

und diese bleibt bestehen, wenn $f(z)$ und $F(z)$ in G simultan fortgesetzt werden. Diese Tatsache pflegt man kurz so auszudrücken, dass alle in G überall fortsetzbare, i. A. mehrdeutige Funktionen eindeutige Funktionen der Uniformisierenden $f(z)$ sind.

Sei wieder a ein Punkt von G, und $f_1(z), f_2(z)$ zwei Funktionselemente mit diesem Mittelpunkte, welche zu Uniformisierenden von G gehören. Mit T_1, T_2 bezeichnen wir die Wertegebiete dieser Uniformisierenden, wobei diese Gebiete in der x-Ebene liegen sollen. Man hat dann, wie wir gesehen haben:

$$f_1(z) = \Phi_2[f_2(z)], \quad f_2(z) = \Phi_1[f_1(z)],$$

wo $\Phi_1(x)$ in T_1, $\Phi_2(x)$ in T_2 eindeutig und regulär ist. Da Φ_1 und Φ_2 inverse Funktionen voneinander und beide eindeutig sind, so folgt sogleich, dass durch diese Funktionen die Gebiete T_1 und T_2 ein-eindeutig konform aufeinander abgebildet werden.

3. Eine Uniformisierende, deren Wertegebiet mit dem Innern des Einheitskreises oder mit der ganzen endlichen Ebene identisch ist, heisst eine *Grenzkreisuniformisierende* von G. Die durch eine solche bewirkte Abbildung heisst *Fundamentalabbildung*. Wenn man beachtet, dass die endliche Ebene keine konforme Abbildung auf das Innere des Einheitskreises gestattet, und dass die konformen Abbildungen der genannten Gebiete in sich lineare Transformationen sind, so erhält man durch Anwendung der Resultate in 2. die folgenden Sätze:

Sind $f_1(z), f_2(z)$ zwei Grenzkreisuniformisierende von G, so bilden sie G beide auf das Innere des Einheitskreises oder beide auf die ganze endliche Ebene ab.

Seien $f_1(z), f_2(z)$ Elemente (mit demselben Mittelpunkte) von zwei Grenzkreisuniformisierenden. Erfolgt die Fundamentalabbildung auf die endliche Ebene, so ist $f_2 = af_1 + b$, wo a, b Konstanten sind. Erfolgt die Fundamentalabbildung auf das Innere des Einheitskreises, so ist

$$f_2 = \frac{af_1 + b}{cf_1 + d},$$

wo $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ den Einheitskreis in sich transformiert.

Bedeuten $f_1(z), f_2(z)$ zwei Elemente mit demselben Mittelpunkte derselben Grenzkreisuniformisierenden, so ergibt die Anwendung dieser beiden Sätze, dass diese Elemente lineare Funktionen voneinander sind, was man kurz so auszudrücken pflegt, dass die Grenzkreisuniformisierende eine *linear polymorphe Funktion* ist. Auch erhält man sofort die bezüglichen Unitätssätze.

4. Was nun die Fundamentalabbildung anbelangt, so können wir dieselbe direkt angeben, wenn G die ganze endliche Ebene oder die endliche Ebene mit Ausnahme eines Punktes, etwa des Nullpunktes, ist. Im ersten Falle wird sie durch die Funktion z, im zweiten durch $\log z$ geliefert. Damit sind aber auch alle Fälle erschöpft, wo die Fundamentalabbildung auf die endliche Ebene erfolgt. Sobald G wenigstens zwei endliche Randpunkte hat, erfolgt die Abbildung auf das Innere des Einheitskreises. Um diese Fallunterscheidung treffen zu können, macht Herr *Koebe*[3]) von der Modulfunktion Gebrauch, die er durch die konforme Abbildung des Spitzendreiecks in der üblichen Weise gewinnt. Wir werden nicht mit der Modulfunktion, sondern mit dem *Schottky*schen Satze arbeiten. Dieser Satz kann bekanntlich in wenigen Worten bewiesen werden, wenn man einmal im Besitze der Modulfunktion ist. Wir stellen uns aber vor, wir hätten denselben durch die elementaren Betrachtungen gewonnen, welche Herr *Schottky*[4]) selbst zum Beweise seines Satzes verwendet hatte. Dadurch wird nämlich unser Existenzbeweis vollkommen unabhängig von dem Existenzsatze für einfach zusammenhängende Gebiete. — Den *Schottky*schen Satz werden wir in der folgenden Form gebrauchen: Sei a ein fester, von 0, 1, ∞ verschiedener Wert. Es gibt dann eine positive Konstante M mit der folgenden Eigenschaft: Ist $g(z)$ in einem Kreise regulär, von Null und 1 verschieden und im Mittelpunkte gleich a, so gilt im halb so grossen konzentrischen Kreise die Abschätzung $|f(z)| < M$.

§ 2.

Der Existenzbeweis.

Wir kommen nun zu unserem eigentlichen Gegenstande, indem wir folgenden Satz beweisen:

Sei G ein Gebiet in der komplexen Zahlenebene, welches die Punkte 0, 1, ∞ *nicht enthält. Sei ferner a ein Punkt in G Dann gibt es ein Funktionselement $f(z)$ mit dem Mittelpunkte a, welches längs aller Wege in G fortgesetzt werden kann, in G schlicht ist, und deren Wertegebiet mit dem Innern des Einheitskreises identisch ist. Man kann noch verlangen, dass $f(a) = 0$, $f'(a)$ reell und positiv sei, dann ist das Element $f(z)$ eindeutig bestimmt.*

---

[3]) *Koebe*, l. c. [1]) Abh. II.

[4]) *F. Schottky*, Problematische Punkte und die elementaren Sätze, die zum Beweise des Picardschen Theorems dienen, Journal für Math. Bd. 147.

Um a als Mittelpunkt zeichnen wir einen Kreis mit einem Halbmesser ϱ, welcher ganz in G liegt, und betrachten die Gesamtheit der Funktionselemente $f(z)$ mit dem Mittelpunkte a, welche in G überall fortgesetzt werden können, in G schlicht sind, absolut kleiner als 1 bleiben in G, und welche gemäss $f(a)=0, f'(a)>0$ normiert sind. Diese Gesamtheit bezeichnen wir mit $\Sigma(G)$.

Die erste Frage ist, ob es überhaupt solche Funktionselemente gibt. Ist G beschränkt, so wird $z-a$, dividiert durch eine hinreichend grosse positive Konstante, ein solches Element liefern. Wenn aber G nur isolierte Randpunkte hat, so wird man solche Elemente unmittelbar nicht angeben können. Dies ist eben der Umstand, welcher entweder die Modulfunktion, oder die Anwendung des *Schottky*schen Satzes nötig macht.

1. Wir nehmen fürs erste an, $\Sigma(G)$ sei nicht leer. Ist dann $f(z)$ ein Element in $\Sigma(G)$, so wird wegen $|f(z)|<1$ und wegen der Regularität von $f(z)$ im Kreise $|z-a|<\varrho$ für $f'(a)$ die Ungleichung $f'(a)<\frac{1}{\varrho}$ gelten. Wenn nun $f(z)$ alle Elemente in $\Sigma(G)$ durchläuft, so hat $f'(a)$ eine endliche obere Grenze, die mit $\lambda(G)$ bezeichnet werden soll.

Es sei $f(z)$ ein Element von $\Sigma(G)$. Das Wertegebiet desselben (d. i. die Gesamtheit der Werte, welches es in G annimmt) liegt ganz im Einheitskreise. Wenn $f(z)$ nicht gerade die gesuchte Grenzkreisuniformisierende ist, so wird dieses Wertegebiet das Innere des Einheitskreises nicht ausfüllen. Wir können dann mit Hilfe der *Carathéodory-Koebe*schen Quadratwurzeltransformation aus $f(z)$ ein Element $F(z)$ von $\Sigma(G)$ ableiten, für welche $F'(a)>f'(a)$ gilt, und zwar auf die folgende Weise. Wir führen der Reihe nach folgende Funktionselemente ein, welche a zum Mittelpunkte haben und in G überall fortgesetzt werden können, wobei sie absolut kleiner als 1 bleiben.

Sei $\beta e^{i\varphi}$ mit $0<\beta<1$ ein Wert, welchen $f(z)$ in G nicht annimmt. Dann setzen wir:

$$f_1(z) = \frac{1}{e^{i\varphi}} f(z)\,;\; f_2(z)=\frac{f_1(z)-\beta}{\beta f_1(z)-1}\,;\; f_3(z)^2=f_2(z),\; f_3(0)=\beta^{1/2}\,;$$

$$f_4(z)=\frac{f_3(z)-\beta^{1/2}}{\beta^{1/2} f_3(z)-1}.$$

Bezüglich $f_3(z)$ ist zu bemerken, dass dieselbe deswegen in G überall fortsetzbar ist, weil daselbst $f_2(z)$ nirgends verschwindet. Alle diese Elemente sind offenbar schlicht in G.

Nach einer einfachen Rechnung erhält man:

$$f_4'(a) = \frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} \frac{1}{e^{i\varphi}} f'(a) \ldots \quad S)$$

Demzufolge wird

$$F(z) = e^{i\varphi} f_4(z)$$

ein Element von $\Sigma(G)$ sein. Wegen $0 < \beta < 1$ ist $\frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} > 1$, folglich $F'(a) > f'(a)$, wie wir es haben wollten.

Das soeben erhaltene Resultat wollen wir noch dazu verwenden, eine Abschätzung für $\lambda(G)$ zu erhalten. Aus der Erklärung von $\lambda(G)$ folgt, dass wir in $\Sigma(G)$ ein Element $f(z)$ finden können, für welche $f'(a) > {}^4/_5\, \lambda(G)$ ist. Wir behaupten, dass das Wertegebiet dieses Elementes die Kreisscheibe $|x| < {}^1/_4$ im Innern enthält. Sei nämlich wieder $\beta e^{i\varphi}$ ein Wert, welchen $f(z)$ in G nicht annimmt. Wenn in $S)$ $f(z)$ dieses Element bedeutet, so werden wir haben

$$\lambda(G) \geqq F'(0) = \frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} f'(0) > \frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} \frac{4}{5} \lambda(G)$$

also:

$$\frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} < \frac{5}{4},$$

woraus $\beta > {}^1/_4$ folgt, w. z. b. w. Die Umkehrfunktion $\varphi(x)$ von $f(z)$ ist also im Kreise $|x| < {}^1/_4$ regulär, im Mittelpunkte gleich a, und in diesem Kreise von 0 und 1 verschieden. Im Kreise $|x| < {}^1/_8$ haben wir folglich nach dem *Schottky*schen Satze $|\varphi(x)| < M$, woraus $\varphi'(0) < 8M$ und wegen $f'(a) = \frac{1}{\varphi'(0)}$ schliesslich die gewünschte Abschätzung

$$\lambda(G) > \frac{1}{8M}$$

folgt.

2. Wie bereits erwähnt, wird man im Allgemeinen unmittelbar nicht sagen können, ob $\Sigma(G)$ leer ist oder nicht. Wir gehen nun daran, ein Element von $\Sigma(G)$ anzugeben, und zwar werden wir sofort die gesuchte Grenzkreisuniformisierende erhalten.

Wir schlagen um a als Mittelpunkt Kreise mit monoton ins Unendliche wachsenden Radien $R_1, R_2, \ldots R_n, \ldots$ Die gemeinschaftlichen Punkte von G und des Kreises mit dem Radius R_n bilden eine Punktmenge, welche in Gebiete zerfällt. Dasjenige dieser Gebiete, welches den Punkt a enthält, bezeichnen wir mit G_n. Da die Gebiete G_n beschränkt sind, so sind $\Sigma(G_1)$, $\Sigma(G_2), \ldots$ sicher nicht leer, und $\lambda(G_1)$, $\lambda(G_2), \ldots$ sind wohlbestimmte positive Zahlen, für welche die Ungleichung $\lambda(G_n) > \frac{1}{8M}$ gilt. Aus $\Sigma(G_n)$ greifen wir nun ein Element $f_n(z)$ heraus, für welches

$$\lambda(G_n) - f'_n(a) < \frac{1}{n}$$

ist. Auf diese Weise erhalten wir die Folge:

$$f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$$

deren Glieder im Kreise $|z-a| < \varrho$ regulär und absolut kleiner als 1 sind. Diese Folge enthält nun (nach dem *Montel*schen Satze) eine gleichmässig konvergente Teilfolge, die der Einfachheit halber ebenfalls mit $f_1, f_2, \ldots$ bezeichnet werden möge. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $f(z)$ und behaupten, dass dieselbe ein Element von $\Sigma(G)$ ist, welches gerade zur gesuchten Grenzkreisuniformisierenden führt.

Zunächst stellen wir fest, dass $f(z)$ keine Konstante ist. Es ist nämlich $f'(a) > \frac{1}{8M}$, weil nach $S)$ $f'(a) = \lim f'_n(a) = \lim \lambda(G_n)$ ist und alle $\lambda(G_n)$ grösser als $\frac{1}{8M}$ sind. Nun wollen wir weiter zeigen, dass $f(z)$ längs aller Wege in G fortgesetzt werden kann. Sei nämlich L ein vom Punkte a zu einem Punkte b führender Weg, welcher ganz innerhalb G verläuft. Wenn n gross genug ist, so wird L ganz in G_n enthalten sein. Die Funktionselemente $f_n, f_{n+1}, \ldots$ können dann alle längs L fortgesetzt werden, wobei sie immer absolut kleiner als 1 bleiben. Da aber die Ausgangselemente gleichmässig konvergieren, so schliessen wir aus dem *Stieltjes*schen Satze, dass die simultanen Fortsetzungen ebenfalls gleichmässig konvergieren. Die Grenzfunktion der simultanen Fortsetzungen liefert aber offenbar die analytische Fortsetzung der Grenzfunktion $f(z)$ der Ausgangselemente. Wir können auch gleich einsehen, dass $f(z)$ in G schlicht ist. Seien nämlich c und d zwei verschiedene Punkte in G, $C(z)$ und $D(z)$ Elemente von $f(z)$ mit diesen Mittelpunkten. Dann ist nach dem soeben Gesagten $C(z)$ die gleichmässige Grenzfunktion einer Folge von Funktionselementen

$C_1(z), C_2(z), \ldots$ mit dem Mittelpunkte c, welche durch simultane Fortsetzung von $f_1(z), f_2(z), \ldots$ längs eines von a nach c führenden Weges L_C erhalten werden. Ebenso ist $D(z)$ die gleichmässige Grenze einer Folge von Funktionselementen $D_1(z), D_2(z), \ldots$ mit dem Mittelpunkte d, welche durch simultane Fortsetzung längs eines Weges L_D zustande kommen. Wir betrachten nur grosse Werte von n, für welche die beiden Wege L_C, L_D in G_n enthalten sind. Um den Punkt c schlagen wir einen kleinen Kreis, um den Punkt d einen zweiten, so dass diese Kreise einander ausschliessen. Da $C(z)$ und $D(z)$ nicht konstant sind, so wird nach dem *Hurwitz*-schen Satze für genügend grosses n $C_n(c') = C(c)$ für einen Punkt c' im ersteren Kreise, und $D_n(d') = D(d)$ für einen Punkt d' im zweiten Kreise sein, wo also $c' \neq d'$ ist. Aus $C(c) = D(d)$ würde dann $C_n(c') = D_n(d')$ folgen, was der vorausgesetzten Schlichtheit von $f_n(z)$ widerspricht. Folglich ist $f(z)$ schlicht in G. Sie bleibt dort kleiner als 1, weil dies für alle $f_n(z)$ der Fall ist und somit ist $f(z)$ ein Element von $\Sigma(G)$.

Da nun $\Sigma(G)$ nicht leer ist, so ist $\lambda(G)$ eine wohlbestimmte Zahl. Da jedes Element von $\Sigma(G)$ auch Element von $\Sigma(G_n)$ ist, weil ja G_n Teilgebiet von G ist, so ist offenbar $\lambda(G) \leqq \lambda(G_n)$. Nach der Erklärung von $\lambda(G)$ ist aber $\lambda(G) \geqq f'(a)$, also:

$$\lambda(G_n) \geqq \lambda(G) \geqq f'(a) = \lim f'_n(a).$$

Wegen $\lim \lambda(G_n) = \lim f'_n(a)$ folgt hieraus schliesslich $f'(a) = \lambda(G)$. Daraus folgt aber, dass das Wertegebiet von $f(z)$ das Innere des Einheitskreises ausfüllt. Sonst könnten wir nach einer früheren Bemerkung aus $f(z)$ ein Element $F(z)$ von $\Sigma(G)$ ableiten, für welches $F'(a) > f'(a) = \lambda(G)$ wäre.

Damit ist bewiesen, dass die Fundamentalabbildung existiert und dass dieselbe auf das Innere des Einheitskreises erfolgt.

§ 3.

Über einfach zusammenhängende Gebiete.

1. Sei G ein Gebiet der komplexen Zahlenebene, welches den unendlichfernen Punkt nicht enthält. Es gibt dann verschiedene Kriterien für den einfachen Zusammenhang desselben. Man kann das Verhalten des Gebietes in Bezug auf Querschnitte betrachten, oder mit Herrn *Weyl*[5]) die Überlagerungsflächen desselben in

[5]) *H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche, § 9.

Betracht ziehen, oder mit Herrn *Bieberbach*[6]) zuschauen, ob die Fundamentalabbildung eindeutig ist oder nicht.

Die für die Funktionentheorie wichtige Eigenschaft der einfach zusammenhängenden Gebiete ist aber die, dass für sie der *Monodromiesatz* gilt: jedes Funktionselement, welches in einem einfach zusammenhängenden Gebiete überall fortgesetzt werden kann, führt zu einer im ganzen Gebiete eindeutigen regulären Funktion. Man kann es also versuchen, das einfach zusammenhängende Gebiet direkt durch diese Eigenschaft zu erklären und zuschauen, wie weit man dann rein funktionentheoretisch kommen kann.

Da wir die Existenz der Fundamentalabbildung bereits bewiesen haben, so können wir zunächst behaupten, dass jedes einfach zusammenhängendes Gebiet ein-eindeutig konform auf die endliche Ebene oder auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden kann, denn diese Ein-eindeutigkeit folgt direkt aus der Erklärung des einfachen Zusammenhanges. Wenn das vorgelegte Gebiet nicht die endliche Ebene ist, so liegt der zweite Fall vor, denn das Gebiet muss dann wenigstens zwei endliche Randpunkte haben. Hätte es nämlich einen einzigen endlichen Randpunkt, etwa den Punkt $z = 0$, so wäre $\log z$ eine im ganzen Gebiete fortsetzbare und doch nicht eindeutige Funktion.

2. Wenn nun ein Gebiet G vorgelegt wird, so entsteht die Frage, wie man entscheiden kann, ob dasselbe einfach zusammenhängt oder nicht. Für die Kreisscheibe haben wir diese Entscheidung auf die Tatsache gegründet, dass am Rande des wahren Konvergenzkreises einer Potenzreihe wenigstens ein singulärer Punkt liegt. Es gibt dann Gebiete, welche durch elementare Funktionen auf die Kreisscheibe abgebildet werden können, z. B. der Kreissektor, der Parallelstreifen. Diese hängen ebenfalls einfach zusammen. Dasselbe gilt von Gebieten, die aus zwei solchen Gebieten so zusammengesetzt werden, dass ihr gemeinsamer Teil *ein einziges Gebiet* ist. Unserer gegenwärtigen Auffassung entsprechend können wir dies etwa wie folgt einsehen: Mit G_1 und G_2 bezeichnen wir die beiden Gebiete, die vereinigt werden sollen, mit G das aus den beiden zusammengesetzte Gebiet, und mit T die Menge ihrer gemeinsamen Punkte, wo also T nach Voraussetzung ein einziges Gebiet bildet. Hierauf betrachten wir ein

[6]) *Bieberbach*, l. c. [2])

Funktionselement $f(z)$, dessen Mittelpunkt in T liegt und welches in G überall fortsetzbar ist. Beschränken wir uns bei dieser Fortsetzung zunächst auf das Gebiet G_1, so erhalten wir wegen des einfachen Zusammenhanges von G_1 eine in G_1 eindeutige reguläre Funktion $F_1(z)$, und ebenso bekommen wir in G_2 eine eindeutige Funktion $F_2(z)$, wobei diese Funktionen in der Umgebung des Mittelpunktes von $f(z)$ mit $f(z)$ übereinstimmen. Da aber T zusammenhängt, so gilt $F_1(z) = F_2(z)$ nicht nur in dieser Umgebung, sondern in T überhaupt, so dass $F_1(z)$, $F_2(z)$ zusammen eine im ganzen Gebiete G eindeutige Funktion $F(z)$ liefern, welche dann die analytische Fortsetzung von $f(z)$ bildet. Damit ist der einfache Zusammenhang von G erwiesen.

Um eine einfache Anwendung zu zeigen, wollen wir das Innere eines Quadrates betrachten. Dieses Gebiet kann aus zwei Kreissektoren zusammengesetzt werden, welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Quadrates zum Mittelpunkte haben und deren Öffnung gleich $\pi/2$ ist. Das Quadratinnere hängt also einfach zusammen und kann folglich auf eine Kreisscheibe abgebildet werden.

Nach unserer Auffassung ist also die Feststellung des einfachen Zusammenhanges als ein funktionentheoretisches Problem zu behandeln. Auf diese Weise entstehen dann Probleme, von welchen ich das folgende anführen möchte. Es seien G_1, G_2 zwei einfach zusammenhängende endliche Gebiete der Zahlenebene, welche gemeinsame Punkte besitzen. Die Menge ihrer gemeinschaftlichen Punkte zerfällt dann in Gebiete, welche alle einfach zusammenhängend sind. Es ist mir nicht gelungen, diese einfache Tatsache in rein funktionentheoretischer Weise zu begründen, ich denke aber, dass eine solche Begründung zu interessanten Betrachtungen Anlass geben würde.

Bibliographie.

L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen. (Grundlehren der math. Wissenschaften VI.) VIII+317 S., Berlin, J. Springer, 1923.

Handelt es sich darum, ein Lehrbuch über Differentialgleichungen zu schreiben, insbesondere eines vom beschränkten Umfange, so besteht die Hauptschwierigkeit in der Auswahl des Stoffes, da diese Disciplin wohl die umfangreichste der ganzen Mathematik ist. Dieser Schwierigkeit begegnet jeder Verfasser eines solchen Lehrbuches und wohl jeder Dozent, der über diesen Gegenstand eine Vorlesung hält, zumal er darauf bedacht sein muss, die wesentlichsten Resultate, die in der Mechanik, theoretischen Physik, Differentialgeometrie etc. zur Anwendung gelangen, vorzutragen. Überaus glücklich ist diese Auswahl in dem neu erschienenen Lehrbuche Bieberbachs getroffen, das auf diese Weise zu dem empfehlungswertesten Lehrbuch dieser Theorie geworden ist, das sowohl zum Selbststudium, wie auch als Nachschlagewerk bei Vorlesungen zu gebrauchen ist. Neben den allgemeinen klassischen Sätzen finden daselbst manche Resultate der neueren Forschung Platz, alles nach einem einheitlichen Plan in strenger Weise durchgearbeitet. Einzelne Untersuchungen werden zwar nur beiläufig gestreift, jedoch in einer Weise, dass der Leser einen klaren Überblick über die entsprechenden Forschungen bekommt. Ausser Acht gelassen wird die Liesche Theorie der Transformationsgruppen, die auch wohl schwer in den Plan des Buches hineinpassen würde.

Die ersten beiden Abschnitte sind den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit den Differentialgleichungen erster Ordnung; nach rascher Erledigung der elementaren Integrationsmethoden (Kap. I.) werden die drei hauptsächlichen Existenzbeweise (successive Approximation, Cauchysche Polygonmethode, Potenzreihen) dargelegt (Kap. II). In interessanter Weise wird die Konvergenz der Polygonmethode begründet durch eine allgemeine Überlegung über die Beurteilung der Annäherung einer Differentialgleichung durch eine andere. Es werden in diesem Kapitel noch die Sätze über die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern besprochen. Der Diskussion des Verlaufes der Integralkurven ist das nächste (III.) Kapitel gewidmet. Hier finden in strenger Weise die schönen Untersuchungen von Poincaré und Bendixson Platz in einem Umfange, wie es bisher wohl in keinem Lehrbuche der Fall war, was hoffentlich die Verbreitung dieser Theorie zur Folge haben wird. Das letzte Kapitel dieses Abschnittes ist den Differentialgleichungen erster Ordnung im komplexen Gebiet gewidmet. Ausser dem bekannten Satz, dass unter den rationalen Differentialgleichungen erster Ordnung nur die Riccatische feste Verzweigungspunkte besitzt, wird das neuerdings von Malmquist bewiesene Theorem abgeleitet, dass jedes eindeutige Integral einer rationalen Differentialgleichung erster Ordnung notwendigerweise eine rationale Funktion sein muss, falls die vorgelegte Differentialgleichung keine Riccatische ist.

Der zweite Abschnitt handelt von den Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ausser den allgemeinen Existenzsätzen und den elementaren Integrationsmethoden (Kap. I, II) wird hier die Diskussion des Verlaufes der reellen

Integralkurve (Kap. III) und die lineare Differentialgleichung im komplexen Gebiet (Kap. IV) behandelt. Im Zusammenhange mit dem erstern Gegenstand werden die Untersuchungen von Birkhoff über geschlossene Integralkurven dargelegt, sodann die verschiedenen Randwertaufgaben, die Oscillationstheoreme, die in der Theorie der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung aufgestellt sind. Daran schliesst der Begriff der Eigenfunktionen und eine kurze Darlegung des Zusammenhanges mit der Theorie der linearen Integralgleichungen. Die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im komplexen Gebiet wird mit dem Studium der Singularitäten der verschiedenen Arten in Angriff genommen, sodann die hypergeometrische Differentialgleichung und ihre Anwendung auf die Funktionentheorie untersucht.

Im dritten Abschnitt werden die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eingeführt. Man findet hier ausser der Charakteristikentheorie, nebst Anwendungen auf Mechanik, eine sehr übersichtliche Darstellung der Theorie der Berührungstransformationen und ihre Anwendung auf partielle Differentialgleichungen.

Der vierte und letzte Abschnitt beschäftigt sich mit den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es wird mit den Existenztheoremen begonnen und daran anschliessend die Charakteristiken eingeführt. Als Beispiel dient die Monge-Ampèresche Differentialgleichung (Kap. I). Sodann wird (Kap. II) die hyperbolische Differentialgleichung studiert und die Riemannsche Integrationsmethode, sowie die Methode der successiven Approximation darauf angewandt. Als Beispiel für die elliptische Differentialgleichung wird die Potentialgleichung und die Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ behandelt (Kap. III); es werden verschiedene Methoden kurz angedeutet, die bei diesen Differentialgleichungen angewandt werden, insbesondere geschieht die Behandlung der zweiten Differentialgleichung mit den neueren Methoden, die zur Begründung des Dirichletschen Prinzips ausgebaut wurden. Am Ende dieses Kapitels wird das asymptotische Verhalten der Eigenwerte zur Sprache gebracht. Das Buch schliesst mit einigen kurzen Andeutungen über die Theorie der parabolischen Differentialgleichungen.

A. H.

W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Band II. **Affine Differentialgeometrie.** Bearbeitet von **K. Reidemeister.** (Grundlehren der math. Wissenschaften VII). IX + 259 S., Berlin, J. Springer, 1923.

Während der erste Band dieser Vorlesungen, eine fesselnde und anregende Einführung in die klassischen Kapitel der Differentialgeometrie, nur hie und da vom wohlmarkierten Wege abschweift, wendet sich hier der Verfasser seinem Lieblingsthema, der affinen Differentialgeometrie zu. Eine lange Reihe von Abhandlungen „Über affine Geometrie", grösstenteils in den sächsischen Berichten erschienen, zeugt von der regen Tätigkeit, mit welcher Verfasser und ein freundschaftlicher Kreis in den letzten 7 Jahren dieses Thema bearbeiteten. Es ist mit grösster Freude zu begrüssen, dass Herr Blaschke den nicht allzuleichten Entschluss fasste, das reiche Material, das nach vereinzelten Vorgängern er, seine Freunde und andere Geometer, so z. B. Fubini, Levi-Civita, zusammentrugen, systematisch zu verarbeiten. Es ist wohl fast überflüssig zu sagen, dass er diese Aufgabe mit der von ihm gewohnten Geschicklichkeit bewältigte.

Das Buch gliedert sich in 7 Kapitel: 1. Ebene Kurven im Kleinen. 2. Ebene Kurven im Grossen. 3. Raumkurven. 4. Flächentheorie, niederer Teil. 5. Allgemeine Flächentheorie. 6. Extreme bei Flächen. 7. Besondere Flächen.

Bei der Fülle des Stoffes wäre es kaum möglich, über den Inhalt sämtlicher Kapitel näher zu berichten. Greifen wir lieber Kap. 6. heraus: nicht aufs Geratewohl, sondern weil dessen Inhalt — on revient toujours — auf die verführerischen Extremalprobleme aus „Kreis und Kugel“ erinnert. Es handelt sich in diesem Kapitel, wenn man von den Affinminimalflächen, die eine merkwürdige, ja manchmal unerwartete Analogie mit den gewöhnlichen Minimalflächen aufweisen, absieht, um Variationsprobleme, die sich fast ohne oder mit sehr wenig Rechenapparat mittels geometrischer Methoden behandeln lassen, von der Art, wie sie für die klassischen isoperimetrischen Probleme aus Steiners unstrengen Ansätzen allmählich durch Schwarz, Carathéodory, Study, Blaschke, Tonelli und Gross ausgebildet wurden. Es werden hier folgende Probleme behandelt: Unter allen Eiflächen mit vorgegebenem Volumen diejenige zu bestimmen, für welche das Volumen des grössten einbeschriebenen Tetraeders am kleinsten wird, wie auch — unter Beschränkung auf die positiv gekrümmten Eiflächen — jene, deren Affinoberfläche, d. i. das Integral $\int\int | EG-F^2 |^{1/4}\, du dv$, am grössten ausfällt. Als Lösung beider Probleme erhält man die Kugel, was sich voraussehen lässt, sobald man erkannt hat, dass bei wiederholter Symmetrisierung des Eikörpers ausser dem Volumen desselben, das bekanntlich ungeändert bleibt, die übrigen in Betracht kommenden Grössen im Allgemeinen sich monoton ändern. Da es sich um affine Invarianten handelt, so sind selbstverständlich die Ellipsoide der Kugel aequivalent und ergeben die allgemeine Lösung beider Probleme. Damit ist freilich nur ein Beweisansatz angedeutet, und bis zur strengen Ausführung ist es kein leichter Weg; wir können den Verfasser nicht überallhin begleiten und erwähnen nur eine merkwürdige Ungleichung zwischen Affinoberfläche Ω und gewöhnlicher Oberfläche O eines konvexen Körpers, auf welcher beim zweiten Problem der sehr einfache Beweis für die Existenz eines Maximums fusst. Die Ungleichung wurde durch Herrn Winternitz entdeckt und lautet: $\Omega^4 \leq 4\pi O^3$. Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Kugel. Es ist bemerkenswert, dass die Ungleichung unmittelbar aus der Schwarz'schen Ungleichung folgt, im Gegensatz zu dem klassischen isoperimetrischen Problem (Volumen und Oberfläche), wo die entsprechende Ungleichung viel tiefer verborgen liegt. Im Anschluss an diese Überlegungen wird schliesslich gezeigt, dass die Ellipsoide die einzigen überall elliptisch gekrümmten Eiflächen mit fester mittlerer Affinkrümmung sind.

Ebenso, wie in Band I, folgt auch hier jedem Kapitel eine lange Reihe von Bemerkungen, Aufgaben und Lehrsätzen, die zum Nachdenken anregen.

F. R.

Émile Borel, Méthodes et problèmes de Théorie des fonctions (Collection Borel), IX + 148 pages, Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1922.

„La lecture des Mémoires originaux devient chaque jour plus difficile pour celui qui connaît seulement de la Théorie des fonctions les parties regardées actuellement comme classiques ; il m'a dès lors semblé qu'on pouvait chercher à faire oeuvre utile en tentant d'exposer, d'une manière élémentaire, certaines recherches qui, bien que relativement récentes, prennent chaque jour une importance plus considérable." „Je n'ai d'ailleurs pas cherché à remplacer la lecture des Mémoires originaux, mais seulement les faciliter; aussi ai-je laissé des lacunes qu'il aurait été aisé de combler en transcrivant presque textuellement un certain nombre de pages de tel ou tel Mémoire: il y a toujours avantage, pour le lecteur qui désire approfondir une question, à recourir lui-même au Mémoire original."

Ces deux phrases, tirées de la préface du premier volume de la Collection, imprimé en 1898, donnent déjà un véritable programme sans que, peut-être, à ce temps-là, M. Borel eût songé à y faire suivre toute cette petite bibliothèque, montant à ce moment à 26 volumes, dont 9 de M. Borel lui-même, les 17 autres de 14 collaborateurs et embrassant — comme le dit la préface de ce dernier volume — „toutes les parties les plus importantes et les plus vivantes de la théorie moderne des fonctions, tant d'une variable réelle que d'une variable complexe." Par son oeuvre personnel et en laissant travailler ses collaborateurs en pleine indépendence, M. Borel a su accomplir sa tâche de la meilleure façon; sans exagérer, nous pouvons dire que sa Collection, en traitant les questions du jour et en rapprochant les derniers résultats acquis aux théories classiques, a enseigné, animé et aidé tous les chercheurs en Analyse de ce dernier quart de siècle. Sa tâche n'est pas encore finie; „de nouveaux collaborateurs ne tarderont pas à combler les lacunes qui subsistent forcément: car la Science ne s'arrète pas."

Dans le présent volume, M. Borel a réuni un grand nombre de ses Notes et Mémoires qui lui paraissaient pouvoir être le point de départ de recherches nouvelles. Il les groupe en 4 chapitres dont voilà les titres: I. Les domaines et la théorie des ensembles. II. Les opèrations et les développements en série. III. La théorie de la croissance et le rôle des constantes arbitraires. IV. Les fonctions de variable complexe en général et les fonctions particulières. Il y a là, dans ces quatre chapitres, une telle variété de questions soulevées, tant de remarques fines et de réflexions profondes qu'il est impossible de donner une idée du livre entier en ces quelques lignes; il faut le lire.

F. R.

H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems. Vorlesungen, gehalten in Barcelona und Madrid. VII + 117 S Berlin, J. Springer 1923.

Während in seinem bekannten Buche *Raum-Zeit-Materie* Weyl die Geometrie der unserer Erfahrungswelt zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit mit Berücksichtigung der Bedürfnisse des theoretischen Physikers behandelt, kommen in dem vorliegenden Werk ausschliesslich die Gesichtspunkte des abstrakten Mathematikers zur Geltung.

Nach einer Einleitung, in dem die euklidisch-minkowskische Raum-Zeit Mannigfaltigkeit mit Hülfe der Begriffe der Geraden und des Nullelementes axiomatisch charakterisiert wird, wendet er sich allgemeinen, durch Aussagen im Infinitesimalen bestimmten metrischen Räumen zu. Der für das folgende grundlegende Begriff der Parallelverschiebung wird rein interngeometrisch eingeführt, und mit seiner Hülfe der „affine" Zusammenhang, geodetische Linie etc. definiert und der Satz bewiesen, dass die Metrik einer Riemann'schen d. h. durch ein quadratisches Linienelement bestimmten Raumes den affinen Zusammenhang eindeutig determiniert.

Aus den allgemeinen metrischen Räumen scheiden die Riemann'sche durch die Forderung der Integrabilität der Streckenübertragung, der Euklidische durch Integrabilität der Vektorübertragung. Es wird sodann das Helmholtz'sche Raumproblem d. h. Bestimmung aller homogenen, eine freie kongruente Übertragung gestattende Raumformen behandelt. Unter den sich ergebenden „Kugelräumen" ist der enklidische Fall als derjenige hervorgehoben, in dem auch ähnliche Abbildung uneingeschränkt möglich ist.

Nach diesen Erörterungen wendet sich *Weyl* zu dem Hauptproblem des Buches: Es sei eine allgemeine metrische Mannigfaltigkeit gegeben, von dem nur vorausgesetzt wird, dass die Metrik den affinen Zusammenhang eindeutig determiniere. Dann gehört zu dem in einer quantitativ bestimmten Ausgestaltung vorliegenden metrischen Felde an jeder Stelle eine nicht-ausgeartete quadratische Differentialform $\Sigma g_{ik} dx_i dx_k$ deren Koeffizienten g_{ik} noch einen willkürlichen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor enthalten. Wird die Mannigfaltigkeit geeicht d. h. über den Proportionalitätsfaktor an jeder Stelle verfügt, so wird der metrische Zusammenhang durch eine lineare Form der Verschiebungen $\Sigma \varphi_i d x_i$ gekennzeichnet. Im Rahmen der Bedingung, dass die quadratische Form niemals ausarten darf und den vorgeschriebenen Trägheitsindex besitzen muss, sind die Koeffizienten g_{ik} und φ_i frei veränderlich und bestimmen den quantitativen Verlauf des metrischen Feldes vollständig. Im Infinitesimalen gilt der Satz von Pythagoras dementsprechend. Der Beweis dieses Satzes bildet den Hauptinhalt des vorliegenden Werkes und wird mit Heranziehung der Lie'schen Gruppentheorie geführt.

RUDOLF ORTVAY.

Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922, 315 S., Helsingfors, Akad. Buchhandlung, 1923.

Die Mathematiker des Nordens, die sich von Zeit zu Zeit zu behaglichen, freundschaftlichen Kongressen versammeln, berichten nun über ihren 5. Kongress in einem äusserst inhaltsreichen Bande. Der Band enthält Arbeiten von R. Birkeland, H. Bohr (Bericht über diophantische Approximationen und Anwendungen auf Dirichlet'sche Reihen und die Zetafunktion), Brun, Carleman, Cramér, Ekman, Fredholm. Holmgren, Iversen, Juel (Studie über v. Staudt's Geometrie der Lage), Kramers (Bericht über Atombau), Lindeberg, Malmquist (B. ü. Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten), Mellin, Mittag-Leffler, Myrberg, Nagel, F. u. R. Nevanlinna, Oystein, Skolem, Steffensen, Störmgren (B. ü. periodische Bewegungen beim 3 Körper-Problem), Störmer (B. ü. Nordlichterscheinungen und verwandte Probleme), Sundman, Thalberg, Wiman.

F. R.

Reprinted by arrangement with the publishers
"KULTÚRA" Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers

Budapest, POB. 149.
Hungary

[1962.]

8813

620621 Athenaeum Nyomda Budapest. Felelős vezető Soproni Béla igazgató